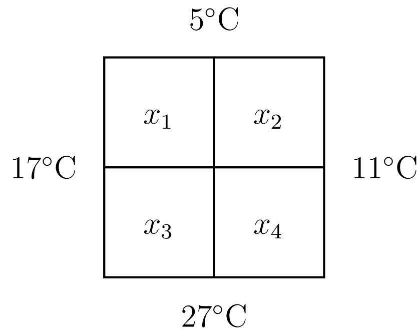
Domácí úkoly z Lineární algebry 1

(19. listopadu 2024)

Úkol 1. Uvažujme rovinu procházející body $A = [2, 3, 3]$, $B = [3, 4, 3]$, $C = [1, 3, 2]$. Najděte bod této roviny, který je nejblíže bodu $D = [2, 1, 2]$. **10**

Úkol 2. Na obrázku je nakreslený plánek domu se čtyřmi místnostmi. Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 27°C, z východu 11°C, ze západu 17°C a ze severu 5°C.



Určete teplotu $x_1, \ldots, x_4$ v jednotlivých místnostech, pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolích oblastí. (Případnou soustavu řešte Gaussovou eliminací.) **10**

Úkol 3. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Navrhněte co nejefektivnější způsob výpočtu $A^k b$.

Konkrétně pak určete kolik operací (počítejme jen součiny čísel) musíme vykonat, když $k = 256$ a $n = 30$. **10**

Speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 200 000. +
Extra speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 100 000. +

Úkol 4. Uvažujme následující způsob šifrování textových zpráv. Každému písmenu A až Z přiřadíme postupně čísla 1 až 26

A → 1	H → 8	O → 15	V → 22
B → 2	I → 9	P → 16	W → 23
C → 3	J → 10	Q → 17	X → 24
D → 4	K → 11	R → 18	Y → 25
E → 5	L → 12	S → 19	Z → 26
F → 6	M → 13	T → 20	
G → 7	N → 14	U → 21	

Tím pádem místo vstupního textu máme posloupnost čísel. Nyní rozdělíme posloupnost do n-tic. Každá n-tice odpovídá vektoru $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Šifrování probíhá potom tak, že vektor přenásobíme předem danou maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tedy každá n-tice v se zašifruje na n-tici Av. Zašifrovanou posloupnost čísel pošleme a příjemce dešifruje zprávu jednoduše tak, že rozdělí posloupnost čísel do n-tic a každou n-tici w vynásobí maticí A^{-1} a dostane $A^{-1}w$. Z tabulky pak přeloží čísla zpět na znaky.

Konkrétně, dešifrujte posloupnost čísel

$$31,\ 53,\ 54,\ 87,\ 28,\ 47,\ 15,\ 29,\ 30,\ 55,\ 15,\ 29,\ 38,\ 67,\ 53,\ 85,$$

za předpokladu, že $n = 2$ a podařilo se vám odhalit, že slovo „PIVO“ se zašifruje jako 34, 59, 52, 89. **10**

Úkol 5. Najděte těleso, skládající se ze 4 prvků „jablko“, „hruška“, „švestka“ a „třešeň“. (Jak vypadají příslušné operace uveďte třeba v tabulce.) **10**

Úkol 6. Mějme 32 mariášových karet a uvažujme následující způsob míchání. Balíček karet rozdělíme na dvě stejně velké hromádky, a ty stylem „zip“ (tj. střídavě po jedné) smícháme dohromady. A konkrétně tak, že první karta jde dolů z balíčku, který byl původně dole. Zjistěte, po kolika mícháních dospějeme k původnímu uspořádání karet. **10**

Úkol 7. Rozhodněte, zda $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor, pokud definujeme operace $\oplus$ (součet vektorů) a $\odot$ (násobek vektoru) takto: **10**

(a) $x \oplus y = x + y,\ \ \alpha \odot x = -\alpha x,$

(b) $x \oplus y = x + y,\ \ \alpha \odot x = (\alpha x_1, 2\alpha x_2, 3\alpha x_3),$

(c) $x \oplus y = x + y - (1,1,1)^T,\ \ \alpha \odot x = \alpha x + (1-\alpha, 1-\alpha, 1-\alpha)^T.$