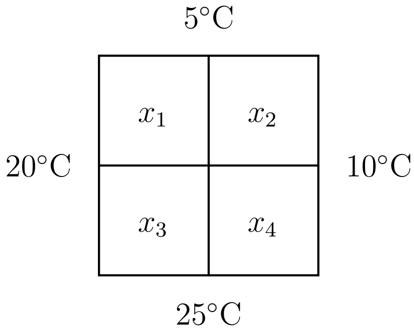
Domácí úkoly z Lineární algebry I

(16. prosince 2022)

Úkol 1. Uvažujme neobývaný dům se čtyřmi místnostmi dle obrázku:



Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 25°C, z východu 10°C, ze západu 20°C a ze severu 5°C. Určete teplotu $x_1, \dots, x_4$ v jednotlivých místnostech pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolích oblastí. (Případnou soustavu řešte Gaussovou eliminací.) **10**

Úkol 2. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Navrhněte co nejefektivnější způsob výpočtu $A^k b$.

Konkrétně pak určete kolik operací (počítejme jen součiny čísel) musíme vykonat, když $k = 256$ a $n = 30$. **10**

Speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 200 000.
Extra speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 100 000.

Úkol 3. Uvažujme následující způsob šifrování textových zpráv. Každému písmenu A až Z přiřadíme postupně čísla 1 až 26

A → 1	H → 8	O → 15	V → 22
B → 2	I → 9	P → 16	W → 23
C → 3	J → 10	Q → 17	X → 24
D → 4	K → 11	R → 18	Y → 25
E → 5	L → 12	S → 19	Z → 26
F → 6	M → 13	T → 20	
G → 7	N → 14	U → 21	

Tím pádem místo vstupního textu máme posloupnost čísel. Nyní rozdělíme posloupnost do n-tic. Každá n-tice odpovídá vektoru $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Šifrování probíhá potom tak, že vektor přenásobíme předem danou maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tedy každá n-tice v se zašifruje na n-tici Av. Zašifrovanou posloupnost čísel pošleme a příjemce dešifruje zprávu jednoduše tak, že rozdělí posloupnost čísel do n-tic a každou n-tici w vynásobí maticí A^{-1} a dostane $A^{-1}w$. Z tabulky pak přeloží čísla zpět na znaky.

Konkrétně, dešifrujte posloupnost čísel

$$31,\ 53,\ 54,\ 87,\ 28,\ 47,\ 15,\ 29,\ 30,\ 55,\ 15,\ 29,\ 38,\ 67,\ 53,\ 85,$$

za předpokladu, že $n = 2$ a podařilo se vám odhalit, že slovo „PIVO“ se zašifruje jako 34, 59, 52, 89. **10**

Úkol 4. Najděte těleso, skládající se ze 4 prvků „jablko“, „hruška“, „švestka“ a „třešeň“. (Jak vypadají příslušné operace uveďte třeba v tabulce.) **10**

Úkol 5. Mějme 52 pokerových karet a uvažujme následující způsob míchání. Balíček karet rozdělíme na dvě stejně velké hromádky a stylem „zip“ (tj. střídavě po jedné) smícháme dohromady. A konkrétně tak, že první karta jde z balíčku, který byl původně dole. Zjistěte, po kolika mícháních dospějeme k původnímu uspořádání karet. **10**

Úkol 6. Buďte V_1, V_2 podprostory vektorového prostoru V. Dokažte, že $V_1 \cup V_2$ je také podprostorem V právě tehdy, když $V_1 \subseteq V_2$ nebo $V_2 \subseteq V_1$. **10**

Úkol 7. Pět pirátů uložilo nahromaděný lup do trezoru Banky de Universidad Carolina. Trojčíselné heslo si nechali zajatým matematikem zakódovat do řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 30 \end{array}\right)$$

tak, aby žádní dva piráti se nemohli dostat k lupu, ale libovolná trojice už ano. Odvedl matematik požadovanou práci? **10**

Úkol 8. Buď $\mathbb{T}$ těleso velikosti n. Označme V množinu všech zobrazení z $\{1, \dots, m\}$ do $\mathbb{T}$.

(A) Ukažte stručně, že V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ se standardními operacemi pro zobrazení, tj. pro $\alpha \in \mathbb{T}$ a $f, g : \{1, \dots, m\} \mapsto \mathbb{T}$ definujeme násobek zobrazení (αf) a součet zobrazení $(f + g)$ jako

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$ **5**

(B) Najděte bázi V a určete $\dim(V)$. **5**

Úkol 9. V nějakém vhodném programu (např. Matlab, Octave, ...) vygenerujte dvě náhodné matice A, B rozměrů 3×6 s prvky v množině $\{0, 1\}$. Najděte bázi prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$, $\mathrm{Ker}\,(A)$, a určete dimenzi prostorů $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$ a $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$. Pomocné základní výpočty (hodnost, RREF tvar, atp.) opět můžete provádět na počítači, ale odevzdejte i mezivýsledky a popište postup. **10**

Úkol 10. Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto P^2$ lineární zobrazení definované takto:

$$f(1,0,1) = x^2 + x + 1, \quad f(0,1,1) = -x^2 + x + 1, \quad f(0,0,1) = x.$$

Určete matici zobrazení f vůči bázím B_1 a B_2, jestliže B_1 se skládá z vektorů $(1,-1,-1)^T$, $(0,0,1)^T$, $(1,1,1)^T$ a báze B_2 se skládá z vektorů $x+1$, $-x^2-x$, x. **10**