Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 1

26. ledna 2023

zpracovali:

Martin Černý a Milan Hladík

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů,
s využitím materiálů od kolegů, jmenovitě:
Pavel Dvořák, Jiří Fiala, Elif Garajová, Pavel Hubáček,
Karel Král, Pavel Paták, Veronika Slívová, Jiří Šejnoha]

Obsah

1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1.1 Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutujte předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Cv. 1.2 Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Cv. 1.3 Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Cv. 1.4 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Cv. 1.5 Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Cv. 1.6 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

Cv. 1.7 Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 5, 3],\ (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1],\ (-1, 2, 2).$$

Cv. 1.8 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 7]$.

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)}\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Cv. 2.4 Nechť matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

Cv. 2.5 Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$.

(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}$.

Cv. 2.7 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

(a) ∞ pro každé b,

(b) 1 pro každé b,

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Cv. 2.8 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 2.9 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 2.10 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy $(A \mid b_i)$ pro $i = 1, 2, 3$. Navrhněte co nejefektivnější způsob!

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,

(b) $A + B$,

(c) C^T,

(d) Cv,

(e) BC,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.2 Mějme A, b definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory $x = (0, 1, 2)^T$, $y = (0, -1, 2)^T$ řešením soustavy $Ax = b$.

Cv. 3.3 Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic 2×2.

Cv. 3.4 Dokažte pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ z definice:

(a) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(b) $A(B + C) = AB + AC$,

(c) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Cv. 3.5 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Cv. 3.6 Buď A matice řádu 10×5, B matice řádu 5×20 a C matice řádu 20×1. Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin ABC?

Cv. 3.7 Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ určete následující.

(a) $A(\alpha e_i)$

(b) $A(e_i + e_j)$

(c) $(\alpha e_i)^T A$

(d) $(e_j + e_j)^T A$

(e) $e_i^T A e_j$

(f) $x^T A y$

Cv. 3.8 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Cv. 3.9 Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice A zprava?

Cv. 3.10 Spočtěte hodnost následujících matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $A = ab^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$

(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Cv. 4.7 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Cv. 4.8 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Cv. 4.9 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Rozhodněte, kdy je regulární.

(b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.

(c) Určete inverzi obecně.

Cv. 4.10 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

5. Grupy a tělesa

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$,
(b) $(\mathbb{Q}, -)$,
(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
(h) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,
(i) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 5.3 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

Cv. 5.4 Mějme grupu $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverze k prvku a nechť je a^{-1}. Proveďte:

(a) najděte e^{-1},
(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

Cv. 5.5 Najděte různé příklady podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$.

Konečná tělesa $\mathbb{Z}_p$

Cv. 5.6 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1}+1)4)^{-1}$ a $4/3$ v tělese $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6+7$, -7, $6\cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v tělese $\mathbb{Z}_{11}$.

Cv. 5.7 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 1, \\ 4x+y+3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 5.9 Spočítejte 20^{3332} v tělese $\mathbb{Z}_{31}$.

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Cv. 6.3 Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic, a to alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší možný počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Cv. 6.4 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí nanejvýš $n-1$ transpozic.

Obecně, permutace $p \in S_n$ se skládá z k cyklů. Pomocí kolika transpozic se dá složit? Najděte všechny možnosti.

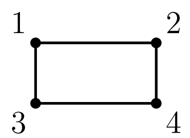
Cv. 6.5 Určete znaménko permutace r zadané tabulkou:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

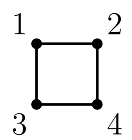
Cv. 6.6 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Cv. 6.8 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.



Cv. 6.9 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.



7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 7.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,

(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,

(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),

(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1,2,3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1,1,1)^T, (2,1,3)^T, (3,1,5)^T$

(b) $(2,1,3)^T, (3,1,2)^T, (1,1,1)^T$.

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(3,2,-2)^T$.

(b) $(2,0,3)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(0,2,1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$,

(d) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x-1,\ x-2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2+2x+3,\ x+1,\ x-1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,
(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(d) $\mathcal{P}^2$,
(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,
(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T, (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.3 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi x^2+1, $x-2$, $2x^2+x-1$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,
(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,
(c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.
(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Direktní součet

Cv. 9.8 Nechť U, V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u+v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Dokažte: Je-li $u_1, \ldots, u_m$ báze U a $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ je báze W.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,

(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
(*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A+B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x,y) = (x, y+3)^T$,
(b) $f(x,y) = (x+2y, y)^T$,
(c) $f(x,y) = (0,0)^T$,
(d) $f(x,y) = (x^2, y)^T$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,
(b) $f(A) = I_n$,
(c) $f(A) = A^2$,
(d) $f(A) = a_{11}$,
(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1,1,2)^T$ při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1,0,0) = (1,1)^T,\ f(0,1,0) = (-1,2)^T,\ f(0,0,1) = (0,0)^T.$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.
(b) Projekce na osu x.
(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.
(d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,1,1)^T, (0,1,-1)^T, (2,0,1)^T\}, \quad B_2 = \{(3,2,2)^T, (1,0,1)^T, (1,2,2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.

(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1.

(c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)^T$ vzhledem k bázi B_1.

(d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1.

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3.

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B_1 = \{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\}, \quad B_2 = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}.$$

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1,-1,1)^T, \quad f(e_2) = (0,1,1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,-1)^T, (1,1)^T\}, \quad B_2 = \{(1,-1,1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}.$$

Spočítejte:

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$.

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$.

(c) matici zobrazení od kanonické bázi k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$.

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_{B}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_{B}[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1,0,-1)^T, (1,1,0)^T, (1,-2,1)^T\}$. Určete ${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\mathrm{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B}[f]_{B}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B'?

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

Obraz a jádro

Cv. 13.1 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 13.2 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(f^n)$.

Cv. 13.3 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1)^T, \quad f(0,1,1) = (-1,0)^T, \quad f(1,1,0) = (1,0)^T.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \mathrm{Ker}(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\mathrm{Ker}(f)$.

Cv. 13.4 Co je obrazem prostoru $\mathrm{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x,\ \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x,\ \cos x\}$?

Cv. 13.5 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U;\ f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U.

Zobrazení prosté a „na“

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

(a) bylo prosté a „na“,

(b) bylo prosté, ale nebylo „na“,

(c) nebylo prosté, ale bylo „na“,

(d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Cv. 13.7 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$f(2,1,1) = (1,2,3)^T,$$
$$f(1,3,5) = (3,2,1)^T,$$
$$f(7,1,4) = (1,1,1)^T.$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 13.8 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Cv. 13.9 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b)^T$.

Isomorfismus

Cv. 13.10 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\ y-z,\ x-y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 13.11 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1+x_2 = x_3+x_4 = 0\}$,

(f) $\mathbb{R}^4$ a prostor lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Cv. 13.12 Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus a $x_1,\dots,x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li $x_1,\dots,x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1),\dots,f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

14. Afinní podprostory

Afinní podprostory, afinní nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T,\ x_1 = (2, 3, 1)^T,\ x_2 = (1, 3, 2)^T,\ x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T,\ x_1 = (2, 2, 1)^T,\ x_2 = (2, 1, 3)^T \text{ a } \ x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \operatorname{span}\{(1, 2)^T\} + (1, -1)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T$,

(b) $M = \operatorname{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T$.

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10);\ x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překloplení podle přímky $q = \{(2, y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 14.7 Dokažte:

(a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.

(b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

(c) Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) \coloneqq \{u \in U \ ;\ f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U.

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.