Příklady na procvičení
z
Lineární algebry 1

1. prosince 2022

zpracovali:

Martin Černý a Milan Hladík

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů,
s využitím materiálů od kolegů, jmenovitě:
Jiří Fiala, Pavel Dvořák, Elif Garajová, Pavel Hubáček,
Karel Král, Pavel Paták, Veronika Slívová, Jiří Šejnoha]

Obsah

1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1.1 Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutujte předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Řešení:
Možností je celá řada:

- *Bod a směrnice přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrnice je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

Cv. 1.2 Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Řešení:
Normálu získáme například vektorovým součinem směrnic $(1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, -3)$. Rovnice má tudíž tvar $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d$. Absolutní člen d určíme ze znalosti bodu roviny, tedy $d = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$. Rovnice tak je

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Pokud se chceme vyhnout použití vektorového součinu (nebo jej neznáme), budeme uvažovat normálu v obecném tvaru (a, b, c) a rovnici tak ve tvaru $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Protože rovina obsahuje bod $[3, 2, 1]$, dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrnice $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$, které musí být kolmé na normálu, dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – můžeme uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení $a = t$, $b = 2t$, $c = -3t$, $d = 4t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolíme například $t = 1$ (nebo jakékoli jiné nenulové t) a máme jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrnic!

Cv. 1.3 Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Řešení:

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme $x_2 = x_3 = 0$ a z rovnice dostaneme $x_1 = 2$. Tudíž máme bod $[2, 0, 0]$.

Směrnice získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu $(2, 3, 1)$. Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například $(0, 1, -3)$ a $(1, 0, -2)$. Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor (a, b, c) musí být kolmý na normálu, tj. $2a + 3b + c = 0$. Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme $a = 0, b = 1$ a dopočítáme $c = -3$, a jako druhé řešení dosadíme $a = 1, b = 0$ a dopočítáme $c = -2$. Opět musíme být trochu opatrní, aby směrnice neudávali stejný směr.

Cv. 1.4 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Řešení:

V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru t.

Například eliminací proměnné x_1 dostaneme rovnici $x_2 + x_3 = 1$. Zvolíme $t = x_3$ jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice $x_2 + x_3 = 1$ odvodíme $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$. Z původní rovnice $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ vyjádříme $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$.

Výsledek: $[x_1, x_2, x_3] = [-1+2t, 1-t, t] = [-1, 1, 0]+t(2, -1, 1)$. To jest, přímka prochází bodem $[-1, 1, 0]$ a má směrnici $(2, -1, 1)$.

Cv. 1.5 Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Řešení:

Každá rovnice musí vyhovovat bodu $[3, 2, 1]$ a její normála musí být kolmá na směrnici $(1, -1, 1)$. Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například $(1, 1, 0)$, ta je kolmá na směrnici. Normále odpovídá rovnice $x_1 + x_2 = d$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d = 5$. Nyní zvolme jinou normálu, například $(0, 1, 1)$, která je též kolmá na směrnici. Ta odpovídá rovnici $x_2+x_3 = d'$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d' = 3$. Tudíž výsledkem jsou rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$.

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu $(1, 0, -1)$, která vede na rovnici $x_1 - x_3 = 2$. Tudíž rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 - x_3 = 2$ dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím $x_1+x_2 = 5$, $x_2+x_3 = 3$ přidali ještě rovnici $x_1-x_3 = 2$, tak soustava $x_1+x_2 = 5$, $x_2+x_3 = 3$, $x_1 - x_3 = 2$ sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

Cv. 1.6 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

Řešení:

Možné polohy přímek:

- *Rovnoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu můžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Totožné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu můžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Různoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemůžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Mimoběžné.*

  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.

  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemůžeme vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

Cv. 1.7 Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 5, 3],\ (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1],\ (-1, 2, 2).$$

Řešení:

Protože jsou směrnice až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod $[1, 5, 3]$ přímky p leží na přímce q, neboť $[1, 5, 3] = [3, 1, -1] + t(-1, 2, 2)$ pro $t = 2$. Tudíž jsou přímky totožné.

Cv. 1.8 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 7]$.

Řešení:

Kvadratická funkce má tvar $y = ax^2 + bx + c$. Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1,\ 4a + 2b + c = 2,\ 9a + 3b + c = 7,$$

z čehož vypočítáme $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$. Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

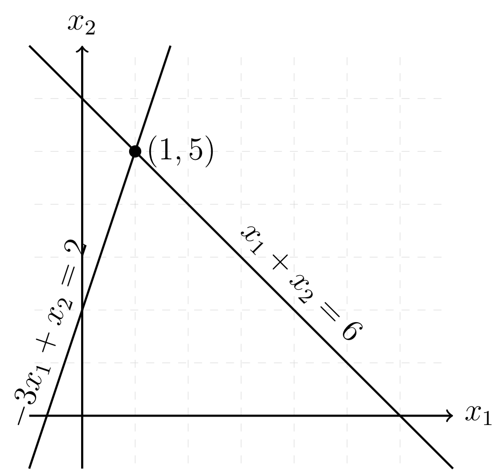
Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

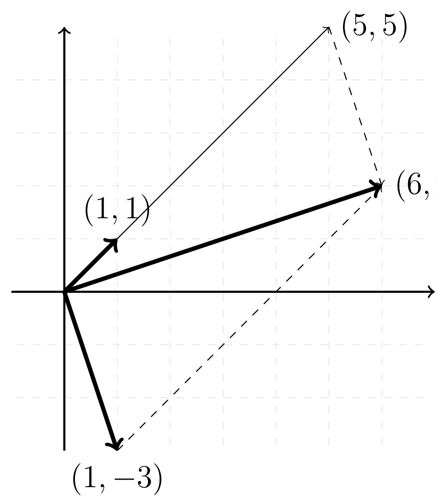
<u>Řešení:</u>
Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$





Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

Dosazením ověříme, že vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ opravdu vyhovuje soustavě (ale už neověříme, zda potenciálně neexistuje nějaké další řešení).

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$

Geometricky množina řešení tvoří přímku, která prochází bodem $(1, 3, 0)$ a má směrnici $(1, -2, 1)$.

V tomto případě opět platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 2$, ale zároveň je $\operatorname{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Dosazením například pro $x_3 = 0$ a $x_3 = 1$ ověříme, že vektory $(1, 3, 0)$ a $(2, 1, 1)$ vyhovují soustavě, a tím pádem jí vyhovují všechny na přímce (opět tím ale neověříme, zda neexistuje nějaké ještě jiné řešení).

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Řešení:

Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{\underline{}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{\bullet} & \overline{} & \overline{} \\ 0 & 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ 0 & \overline{0} & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & & \\ 0 & 0 & \overline{\bullet} & \overline{} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\bullet} \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \dots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, tj. celkem $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.

Cv. 2.4 Nechť matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

Řešení:

Z matice A můžeme odstranit libovolný řádek nebo více řádků a podmínky na REF tvar zůstanou zachovány, čili tato operace zachovává vlastnost být v odstupňovaném tvaru.

Libovolný sloupec vynechat nemůžeme, například odstraněním prvního sloupce z matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ dostaneme matici, která v REF tvaru není. Můžeme ale odstranit jakékoli nebázické sloupce (tj. ty bez pivota) a také libovolné sloupce zprava.

Cv. 2.5 Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

Řešení:
Například vynásobení řádku nulou. Nebo odečtení řádku od sebe sama. Nebo odečtení naráz dvou řádků navzájem od sebe (čili děláme najednou dvě úpravy; každá z nich je v pořádku, ale musíme je vykonat postupně).

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}$.
(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Toto je kreativní příklad, možných soustav $(A \mid b)$ je bezpočet a lze k nimi dospět různými úvahami.

(a) Protože je množinou řešení přímka, musíme sestavit alespoň 3 rovnice. Dále si uvědomíme, že mezi řešeními je nulový vektor (volbou $t := 0$), tudíž musí být pravá strana nulová, čili $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$. Protože řešení splňuje $x_3 = x_4 = 0$, třetí a čtvrtý sloupec matice A mohou obsahovat libovolné hodnoty. A konečně, protože $x_1 = -2x_2$, musí být první sloupec matice A polovinou druhého sloupce.
Hledanou soustavou tak může být například
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Analogicky jako v předchozím případě sestavíme matici A. Vektor b dopočítáme tak, aby $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4)$ bylo řešením rovnic. Můžeme vzít například
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.7 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

(a) ∞ pro každé b,

Řešení:
Například $A = (1\,1)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m < n$.

(b) 1 pro každé b,

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = m = n$.

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) = n \leq m$.

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Řešení:
Například $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Dané podmínce vyhovují právě matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, splňující vztah $\operatorname{rank}(A) < \min\{m, n\}$.

Cv. 2.8 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

V zásadě aplikujeme standardní postup Gaussovy eliminace, i když u těchto typů příkladů je občas výhodnější k odstupňovanému tvaru matice dospět jinou sérií elementárních úprav.

Nejprve přičteme první řádek ke všem ostatním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots & 1\\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Nyní druhý řádek přičteme ke všem, co se nachází pod ním:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & -1 & \dots & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Tento postup opakujeme, dokud nedospějeme k matici v odstupňovaném tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1} \end{array}\right).$$

Z pravé strany matice vyčteme řešení $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.

Tento příklad ilustruje ještě jednu vlastnost Gaussovy eliminace a obecně řešení soustav rovnic. Vstupní hodnoty jsou malá celá čísla, pouze 0, 1 a -1. Nicméně během úprav matice, stejně jako na výstupu jako řešení, jsme dostali některá čísla exponenciálně velká (konkrétně 2^{n-1}). S touto vlastností musíme počítat mj. při návrhu a implementaci numerických metod na řešení (potenciálně hodně velkých) soustav rovnic. Velká čísla nebo čísla velmi blízko nuly totiž zhoršují numerické vlastnosti řešení (zaokrouhlovací chyby během výpočtu mohou narůstat).

Cv. 2.9 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:

Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Hodnota v matici na pozici $(3,3)$ je $2-a-a^2 = (1-a)(a+2)$ a v závislosti na hodnotě parametru a může být někdy nulová. Proto musíme provést následující rozbor případů:

- „Případ $a = -2$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 3$. V tomto případě řešení neexistuje.
- „Případ $a = 1$." Poslední řádek odpovídá rovnici $(1-a)(a+2)x_3 = 1-a$, neboli $0 \cdot x_3 = 0$. Předchozí řádek je také nulový. Tudíž zbývá jediná rovnice, a to první, která má tvar $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. V tomto případě je množina řešení nekonečná a je tvaru
$$(1 - x_2 - x_3,\, x_2,\, x_3), \quad \text{kde } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$
- „Případ $a \notin \{-3, 1\}$." Nyní je hodnota v matici na pozici $(3,3)$ nenulová a jedná se o pivota. Zpětnou substitucí tedy dopočítáme jednoznačné řešení
$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\tfrac{1}{a+2},\, \tfrac{1}{a+2},\, \tfrac{1}{a+2}\right).$$

Cv. 2.10 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy $(A \mid b_i)$ pro $i = 1, 2, 3$. Navrhněte co nejefektivnější způsob!

Řešení:

Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením soustavy je tedy vektor $x = (2, 1, 1)$ pro pravou stranu b_1, vektor $x = (1, 0, 3)$ pro b_2 a vektor $x = (4, -1, -1)$ pro b_3.

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,

(b) $A + B$,

(c) C^T,

(d) Cv,

(e) BC,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $m \times n$ výsledná matice bude také řádu $m \times n$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-1) \\ 2 + 0 & -1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Je-li původní matice rozměrů $m \times n$, transponovaná matice bude mít rozměry $n \times m$. Její prvek na pozici (i, j) je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici (j, i). Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Je-li matice C řádu $m \times n$, musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(e) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) & (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 3.2 Mějme A, b definované jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřte pomocí maticového násobení, zda jsou vektory $x = (0, 1, 2)^T$, $y = (0, -1, 2)^T$ řešením soustavy $Ax = b$.

Řešení:
Násobením Ax dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Násobením Ay dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektor x tedy řešením soustavy není, zatímco vektor y ano.

Cv. 3.3 Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic 2×2.

Řešení:
Toto je kreativní příklad. V zásadě skoro každé dvě netriviální matice splní zadání. Například:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.4 Dokažte pro $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ z definice:

(a) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

(b) $A(B + C) = AB + AC$,

(c) $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Řešení:
Rovnost $X = Y$ dvojice matic $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí, pokud si jsou rovny všechny jejich prvky. Ve všech podúlohách proto otestujeme pro libovolnou dvojici indexů i, j rovnost $X_{ij} = Y_{ij}$.

(a) Z definice násobení skalárem a maticového násobení vyjádříme

- $(\alpha(AB))_{ij} = \alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$,
- $((\alpha A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha A_{ik}B_{kj}$,
- $(A(\alpha B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\alpha B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\alpha B_{kj}$.

Z vlastností komutativity a distributivity reálných čísel vyplývá vzájemná rovnost všech tří výrazů.

(b) Z definice násobení vyjádříme

$$(A(B+C))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj})$$

a

$$(AB + AC)_{ij} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{kj}.$$

Roznásobením členů sumy v prvním výrazu a jejich přeuspořádáním můžeme rozdělit výraz na dvě sumy odpovídající druhému výrazu.

(c) Z definice transpozice a sčítání matic vyjádříme

$$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

a

$$(A^T + B^T)_{ij} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}.$$

Cv. 3.5 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Řešení:

(a) Z přednášky víme, že $(AB)^T = B^T A^T$. Tuto vlastnost využijeme dvakrát a vyjádříme
$$((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T.$$

(b) Matice M je symetrická, pokud $M^T = M$. Ověříme tedy tuto vlastnost pro matici $M = A^T A$. Odvodíme $M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M$, což dokazuje požadovanou symetrii.

Cv. 3.6 Buď A matice řádu 10×5, B matice řádu 5×20 a C matice řádu 20×1. Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin ABC?

Řešení:
Na vynásobení dvou obecných matic $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ je třeba $m \cdot p$ skalárních součinů ve tvaru $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} X_{ik}Y_{kj}$. V rámci každého je třeba provést n násobení (za každý člen sumy) a $n-1$ součtů. Celkově tedy provedeme $mp(2n-1)$ aritmetických operací. Při násobení v pořadí $(AB)C$ nejprve vynásobíme AB, což stojí

$$10 \cdot 20 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 1800 \text{ operací.}$$

Matice AB má rozměr 10×20. Násobení $(AB)C$ proto stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 390 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $(AB)C$ stojí 2190 aritmetických operací.

Oproti tomu, násobení BC stojí

$$5 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 20 - 1) = 195 \text{ operací}$$

a $A(BC)$ stojí dalších

$$10 \cdot 1 \cdot (2 \cdot 5 - 1) = 90 \text{ operací.}$$

Celkem tedy násobení v pořadí $A(BC)$ stojí 285 aritmetických operací, což je podstatně méně, než v prvním případě.

Poučení: I když je násobení matic asociativní, a tudíž na uzávorkování nezáleží matematicky, tak na něm záleží výpočetně.

Cv. 3.7 Pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ určete následující.

(a) $A(\alpha e_i)$
(b) $A(e_i + e_j)$
(c) $(\alpha e_i)^T A$
(d) $(e_j + e_j)^T A$
(e) $e_i^T A e_j$
(f) $x^T A y$

Řešení:

(a) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $A(\alpha e_i) = \alpha(Ae_i)$. Výraz $A(\alpha e_i)$ tedy odpovídá α-násobku i-tého sloupce A_{*i}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $Ae_i = A_{*i}$.

(b) Opět nejprve upravíme $A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j$. Výraz $A(e_i + e_j)$ tedy odpovídá součtu i-tého a j-tého sloupce $A_{*i} + A_{*j}$.

(c) Z vlastnosti součinu můžeme upravit $(\alpha e_i)^T A = \alpha(e_i^T A)$. Výraz $(\alpha e_i)^T A$ tedy odpovídá α-násobku i-tého řádku A_{i*}. Pro $\alpha = 1$ tak dostaneme známé trvzení $e_i^T A = A_{i*}$.

(d) Opět nejprve upravíme $(e_j + e_j)^T A = e_j^T A + e_j^T A$. Výraz $(e_j + e_j)^T A$ tedy odpovídá součtu j-tého a j-tého řádku $A_{j*} + A_{j*}$.

(e) Aplikací předchozích vztahu postupným násobením dostáváme $(e_i^T A)e_j = A_{i*}e_j = A_{ij}$. Výraz $e_i A e_j$ tedy odpovídá výběru prvku a_{ij}.

(f) Využijeme všech předchozích vztahů a faktu, že vektory x, y můžeme vyjádřit jako kombinace $x = x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_me_m$ a $y = y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n$. Poté

$$x^T Ay = (x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_me_m)^T A(y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n).$$

Z distributivity, asociativity a vztahu $e_i^T Ae_j$ postupně dostáváme

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_ie_j)^T A(y_je_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_je_i^T Ae_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_iy_jA_{ij}.$$

Cv. 3.8 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je libovolná matice a $E_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $j \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \ldots, n\}$ matice $E_i(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ platí:

$$\begin{aligned} (E_i(\alpha)A)_{jk} &= \sum_{\ell}(E_i(\alpha))_{j\ell}A_{\ell k} \\ &= (E_i(\alpha))_{jj}A_{jk} && ((E_i(\alpha))_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} A_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha A_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } (E_i(\alpha))_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že $E_i(\alpha)A$ má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí A a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & j & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice a $E_{ij}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ matice $E_{ij}(\alpha)A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$\begin{aligned} (E_{ij}(\alpha)A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} A_{\ell h} \\ &= \begin{cases} (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ (E_{ij}(\alpha))_{kk} A_{kh} + (E_{ij}(\alpha))_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\ &\qquad\qquad (\text{pro ostatní hodnoty } m \text{ je } (E_{ij}(\alpha))_{k\ell} = 0) \\ &= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ A_{kh} + \alpha A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \\ &\qquad\qquad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } E_{ij}(\alpha)) \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

(c) Prohození i-tého a j-tého řádku můžeme zapsat pomocí matice

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je libovolná matice $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matice popsaná výše. Potom pro libovolný řádek

$k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ matice $E_{ij}A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí:

$$\begin{aligned}
(E_{ij}A)_{kh} &= \sum_{\ell} (E_{ij})_{k\ell} A_{\ell h} \\
&= \begin{cases} (E_{ij})_{kk} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ (E_{ij})_{ki} A_{ih} & \text{pro } k = j \\ (E_{ij})_{kj} A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } (E_{ij})_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} A_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ A_{ih} & \text{pro } k = j \\ A_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } (E_{ij}))
\end{aligned}$$

Vidíme, že $(E_{ij})A$ má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí A a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

Cv. 3.9 Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice A zprava?

Řešení:

K odpovědi bychom mohli dojít několika způsoby. Jedna možnost by byla vynásobit postupně matici A maticemi elementárních řádkových úprav zprava a zanalyzovat výsledek. My však využijeme toho, že víme, co se děje při násobení maticemi elementárních řádkových úprav zleva a vlastností transpozice matic. Pokud je E jedna z matic úprav, dostáváme

$$(AE)^T = E^T A^T.$$

Na tento vztah se dá nahlížet tak, že sloupce AE odpovídají řádkům $E^T A^T$. Z definice matic elementárních řádkových úprav je snadné nahlédnout, jak vypadají jejich transpozice. Konkrétně

- $(E_i(\alpha))^T = E_i(\alpha)$,
- $(E_{ij}(\alpha))^T = E_{ji}(\alpha)$,
- $(E_{ij})^T = E_{ij}$.

Zatímco pro první a třetí úpravu je transpozice rovna původní matici, pro přičtení α-násobku j-tého řádku i i-tému se transpozicí změní na příčtení α-násobku i-tého řádku k j-tému.

Vidíme tedy, že $E^T A^T$ odpovídá provádění elementárních řádkových úprav na řádky matice A^T, které odpovídají sloupcům matice A. Kombinací všech těchto pozorování dostáváme následující závěr.

(a) Sloupce $AE_i(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_i(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy zprava vynásobíme i-tý sloupec matice A skalárem α.

(b) Sloupce $AE_{ij}(\alpha)$ odpovídají řádkům $E_{ji}(\alpha)A^T$. Aplikací této úpravy přičteme α-násobek i-tého sloupce k j-tému sloupci matice A.

(c) Sloupce AE_{ij} odpovídají řádkům $E_{ij}A^T$. Aplikací této úpravy zprava prohodíme i-tý a j-tý sloupec matice A.

Cv. 3.10 Spočtěte hodnost následujících matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

(b) $A = ab^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Řešení:

(a) K výpočtu hodnosti je možné využít Gaussovu eliminaci. Vidíme, že druhý řádek je fakticky 3-násobek prvního. Proto po jednom kroku eliminace, kdy přičteme (-3)-násobek prvního řádku k druhému dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta je již v REF tvaru a její hodnost je 1.

(b) Pro určení hodnosti matice je dobré si uvědomit, jak matice vypadá. Platí, že $(ab^T)_{ij} = a_i b_j$, explicitně

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots & a_2b_n \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots & a_3b_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & - & a_1b^T & - & \quad \\ & - & a_2b^T & - & \\ & - & a_3b^T & - & \\ & & \vdots & & \\ & - & a_nb^T & - & \end{pmatrix}.$$

Řádky matice ab^T jsou jen násobky vektoru b^T. Mohou tedy nastat pouze dvě situace. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, triviálně $\text{rank}(ab^T) = 0$. V opačném případě existuje aspoň jedno $a_i \neq 0$ a všechny řádky matice jsou násobky i-tého řádku. Podobně jako v předchozí úloze je tedy $\text{rank}(ab^T) = 1$.

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:
Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:
Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převedeme tím na předchozí případ.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;

(b) $x = e_i - e_j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Řešení:
Ve všech třech případech využijeme algoritmu, kdy pomocí Gaussovy–Jordanovy (G-J) eliminace převedeme matici $(A \mid I_n)$ na tvar $(I_n \mid A^{-1})$.

(a) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

(b) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(c) Pomocí G-J eliminace dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} d_1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & d_n & 0 & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \frac{1}{d_1} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & \frac{1}{d_n} \end{array}\right)$$

Jediné, co G-J eliminace provádí za operace je přeškálování řádků, protože první podmatice je již v diagonálním tvaru.

Inverzní matice existuje ale jen tehdy, když všechny hodnoty $d_1, \ldots, d_n$ jsou nenulové. V opačném případě je matice singulární, a tudíž inverzi nemá.

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Řešení:
Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je pomocí G-J eliminace převodem $(A \mid I_n)$ na $(I_n \mid A^{-1})$. Matici

$E_i(\alpha)$ invertujeme takto:

$$(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).$$

Matici $E_{ij}(\alpha)$ invertujeme takto:

$$(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).$$

Matici E_{ij} invertujeme takto:

$$(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu matic elementárních úprav. Matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je reprezentováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} je inverzní sama k sobě.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$

(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Řešení:

(a) Stačí iterativně aplikovat pravidlo $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$. Tedy:

$$(ABC)^{-1} = (A(BC))^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

(b) S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned}
(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}& \\
&= IA - B^T A^{-1} A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\
&= IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\
&= A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení matic } I\text{]} \\
&= A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\
&= A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Cv. 4.7 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Řešení:

Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože

$$(ABA^{-1})^1 = AB^1 A^{-1}.$$

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}
(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1}) \\
&= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1} \\
&= AB^k A^{-1}.
\end{aligned}$$

Cv. 4.8 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

<u>Řešení:</u>
Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 4.9 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Rozhodněte, kdy je regulární.

(b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.

(c) Určete inverzi obecně.

Řešení:

(a) Regularitu můžeme otestovat Gaussovou eliminací převodem do odstupňovaného tvaru. Uvědomme si, že při eliminaci řádků odpovídajících matici A nijak neupravujeme řádky odpovídající C a naopak. Regularita matice je proto podmíněna regularitou bloku C, v opačném případě bychom dostali nulový řádek. Pokud je blok C regulární, jsme schopni matici převést do tvaru
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$
Tedy pokud by nebyl blok A regulární, mohli bychom z tohoto tvaru získat Gaussovou eliminací nulový řádek. Regularita bloků A, C je tedy nutnou podmínkou regularity matice.

Zároveň regularita A, C zajišťuje, že můžeme převést matici do tvaru
$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix},$$
což je redukovaný odstupňovaný tvar původní matice s plnou hodností. Regularita bloků A, C je tedy jak nutnou, tak i postačující podmínkou regularity.

(b) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$
Podobně jako v předchozím podúloze se při G-J eliminaci budou upravovat řádky odpovídající blokům A a C nezávisle na sobě. Při převodu $\left(A \quad 0_n \mid I_n \quad 0_n\right)$ se nulové bloky 0_n po celou dobu výpočtu nebudou měnit a nebude na nich záviset ani podoba eliminace. Na konci eliminace proto dostaneme $\left(I_n \quad 0_n \mid A^{-1} \quad 0_n\right)$. Obdobný průběh bude mít i výpočet na podmatici $\left(0_n \quad C \mid 0_n \quad I_n\right)$. Inverzní matice má proto tvar
$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

(c) Pro výpočet inverze můžeme blokově zapsat rozšířenou soustavu jako
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & C & 0_n & I_n \end{array}\right).$$
Opět využijeme nezávislosti eliminace pro řádky odpovídající blokům A a C a převedeme matici nejprve do tvaru
$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

Klíčové je, že po zbytek eliminace se spodní dva bloky již měnit nebudou. Víme tedy, že inverzní matice má tvar

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix},$$

kde matice X, Y zatím neznáme. Určit je můžeme ze vztahu matice a její inverze,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Z tohoto vztahu můžeme odvodit dvojici soustav,

$$AX = I_n \quad \text{a} \quad AY + BC^{-1} = 0_n.$$

Z první soustavy dostáváme $X = A^{-1}$, z druhé $Y = -A^{-1}BC^{-1}$. Inverzní matice má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Alternativní způsob získání matic X, Y je, že upravujeme přímo bloky v matici

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right).$$

První blokový řádek vynásobíme maticí A^{-1} (z bodu (a) víme, že existuje):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & A^{-1}B & A^{-1} & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

a nakonec od prvního blokového řádku odečteme $A^{-1}B$-násobek druhého:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I_n & 0_n & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_n & I_n & 0_n & C^{-1} \end{array}\right)$$

Cv. 4.10 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

<u>Řešení:</u>

Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$-násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha\frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n - 1$.

5. Grupy a tělesa

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(h) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(i) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Řešení:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelovou grupou:

- sčítání je komutativní i asociativní operace,
- neutrální prvek je 0
- k racionálnímu číslu q je inverzní prvek $-q$.

(b) $(\mathbb{Q}, -)$ není grupou, protože rozdíl racionálních čísel není asociativní operace. Například $(8 - 6) - 1 = 1 \neq 3 = 8 - (6 - 1)$.

(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ není grupou. Součin je sice komutativní i asociativní operace a existuje neutrální prvek 1, ale k číslu 0 neexistuje inverzní prvek.

(d) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \circ)$ s operací $a \circ b = |ab|$ není grupou, protože není zaručena existence neutrálního prvku. Pro každé $a < 0$ a číslo e je $a \circ e = |ae| > 0 > a$. Tudíž žádné e nemůže splňovat definici neutrálního prvku pro záporná a.

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ není grupou, protože aritmetický průměr čísel není asociativní. Například pro $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ máme $a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5+7}{2}\right) = 3.5 \neq 5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+5}{2} + 7\right) = (a \circ b) \circ c$.

(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$ s operací $a \circ b = a + b + 3$ je Abelovou grupou. Asociativita a komutativita platí z asociativity a komutativity sčítání nad $\mathbb{Q}$. Neutrální prvek je $e = -3$, protože pro každé $a \in \mathbb{Q}$ platí

$$a \circ e = a + (-3) + 3 = a = (-3) + a + 3 = e \circ a.$$

Konečně, inverzní prvek k prvku $a \in \mathbb{Q}$ je $a^{-1} = -a - 6$, protože

$$a \circ a^{-1} = a + (-a - 6) + 3 = -3 = e = -3 = (-a - 6) + a + 3 = a^{-1} \circ a.$$

(g) $(\mathcal{F}, +)$ je grupou. Asociativita plyne z definice součtu funkcí a asociativity sčítání nad $\mathbb{R}$. Pro každé $f, g, h \in \mathcal{F}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$. Neutrální prvek je identicky nulová funkce $e(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Inverzní prvek k funkci $f \in \mathcal{F}$ je funkce $-f$.

(h) Množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení. Komutativita platí také, protože uvažujeme rotace v rovině. Neutrálním prvkem je například rotace o 360 stupňů. Inverzním prvkem k rotaci o úhel α je rotace o úhel α v opačném směru.

(i) Množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ je Abelovou grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení a komutativita z komutativity sčítání vektorů. Neutrálním prvkem je identické zobrazení $e((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T$ (tj. posunutí vektorem $(0, 0)^T$) a inverzím prvkem k posunutí $t((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T + (a, b)^T$ je posunutí $t^{-1}((x_1, x_2)^T) = (x_1, x_2)^T - (a, b)^T$.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Řešení:

Všechny tabulky až na poslední jsou určeny jednoznačně. Fakt, že 0 je neutrálním prvkem pro $\circ$ určuje první řádek i sloupec tabulky. Existence levé i pravé inverze omezuje pozice 0 na diagonále nebo symetricky podle diagonály. Asociativita vynutí zbylé pozice. Dostáváme:

(a)

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

… aditivní grupa modulo 2, tj. $(\mathbb{Z}_2, +)$

(b)

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

… aditivní grupa modulo 3, tj. $(\mathbb{Z}_3, +)$

(c)

∘	0
0	0

… triviální grupa,

(d)

∘	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

, anebo

∘	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

.

První je Kleinova grupa symetrií obdélníka, a to druhé je $(\mathbb{Z}_4, +)$ s přejmenovanými čísly (prohozena 1 a 2).

Cv. 5.3 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

Řešení:

Ano. Nejdříve ukážeme, že maticový součin je uzavřený pro danou množinu. Pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

což je matice náležející do zadané množiny (neboť celá čísla jsou uzavřená na součet).

Asociativita maticového součinu na dané množině plyne z asociativity maticového součinu pro obecné čtvercové matice stejných rozměrů.

Neutrálním prvkem je jednotková matice řádu dva, jež patří do zadané množiny (volbou $z := 0 \in \mathbb{Z}$).

Inverzním prvkem pro matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je celočíselná matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, což plyne z rovnosti (1).

Zadaná množina matic spolu s maticovým součinem tvoří grupu. Zbývá ověřit, zda je maticový součin pro tyto matice komutativní. Komutativita maticového součinu plyne z rovnosti (1) a komutativity sčítání nad $\mathbb{Z}$. I když obecně součin matic není komutativní, pro naši třídu matic komutativita splněna jest.

Ověřili jsme tedy, že se jedná o Abelovskou grupu.

Cv. 5.4 Mějme grupu $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverze k prvku a nechť je a^{-1}. Proveďte:

(a) najděte e^{-1},

(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

Řešení:

(a) $e^{-1} = e$, neboť $e \circ e = e$.

(b) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ neboť

$$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$$

a analogicky v opačném pořadí.

Cv. 5.5 Najděte různé příklady podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$.

Řešení:
Příkladů je nespočet. Podgrupou je taková (neprázdná) podmnožina matic $\mathbb{R}^{n\times n}$, která je uzavřená na násobky a součty. Přikladem je tak například podgrupa symetrických matic. Dalšími příklady jsou trojúhelníkové matice, horní trojúhelníkové matice, diagonální matice, matice s racionálními čísly, matice s celými čísly, atp.

Konečná tělesa $\mathbb{Z}_p$

Cv. 5.6 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ a $4/3$ v tělese $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v tělese $\mathbb{Z}_{11}$.

Řešení:

(a) Těleso $\mathbb{Z}_5$ je definováno jako množina všech zbytků v $\mathbb{Z}$ po dělení 5 spolu s operacemi součtu a součinu modulo 5. Pro názornost uvádíme tabulky pro obě operace.

$\mathbb{Z}_5, +$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

,

$\mathbb{Z}_5, \cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Podle definice tělesa má množina $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ se součinem modulo 5 tvořit Abelovu grupu; zde je to takzvaná multiplikativní grupa modulo 5. V tabulce můžeme některé vlastnosti grupy snadno nahlédnout, například komutativitu nebo existenci neutrálního a inverzního prvku.

Nyní můžeme vyhodnotit zadané výrazy v $\mathbb{Z}_5$, kde při výpočtu nalezneme multiplikativní inverzi k libovolnému $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ v tabulce tak, že v řádku s a najdeme hodnotu 1 a index b odpovídajícího sloupce musí být hledaná multiplikativní inverze a^{-1}, protože $a \cdot b = 1$ v $\mathbb{Z}_5$. Dostáváme:

$$((2^{-1} + 1)4)^{-1} = ((3 + 1)4)^{-1} = (4 \cdot 4)^{-1} = (1)^{-1} = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_5$$

a

$$4/3 = 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 3 \text{ v } \mathbb{Z}_5.$$

(b) Postupujeme podobně jako pro $\mathbb{Z}_5$, ale nebudeme konstruovat celou tabulku pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} 6+7 &= 6+7 \pmod{11} = 13 \pmod{11} = 2 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}, \\ -7 &= 11-7 \pmod{11} = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}. \\ 6\cdot 7 &= 6\cdot 7 \pmod{11} = 42 \pmod{11} = 9 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}. \end{aligned}$$

Při hledání multiplikativní inverze k prvku 7 můžeme postupovat jako při výpočtu řádku odpovídajícího 7 v tabulce pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Výpočet zastavíme v momentě, kdy uvidíme na pravé straně číslo 1:

$$\begin{aligned} 7\cdot 1 &= 7, \\ 7\cdot 2 &= 3, \\ 7\cdot 3 &= 10, \\ 7\cdot 4 &= 6, \\ 7\cdot 5 &= 2, \\ 7\cdot 6 &= 9, \\ 7\cdot 7 &= 5, \\ 7\cdot 8 &= 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$7^{-1} = 8 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Tuto hodnotu využijeme i při posledním výpočtu:

$$6/7 = 6\cdot 7^{-1} = 6\cdot 8 = 48 \pmod{11} = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Cv. 5.7 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1, \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Řešení:

Postupujeme podobně jako pro soustavy rovnic nad $\mathbb{R}$. Využijeme toho, že eliminovat prvky pod pivotem můžeme přičtením vhodného násobku řádku s pivotem. Přičtením 2-násobku prvního řádku k druhému dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Za volné proměnné zvolíme parametry $y, z \in \mathbb{Z}_5$ a vyjádříme

$$x = 3^{-1}(1 - 2y - z) = 2(1 + 3y + 4z) = 2 + y + 3z.$$

Množina všech řešení dané soustavy je tedy

$$\{(2,0,0)^T + y(1,1,0)^T + z(3,0,1)^T \mid y, z \in \mathbb{Z}_5\}.$$

Máme $25 = 5\cdot 5$ různých voleb parametrů y a z a mohutnost množiny řešení je tedy 25.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:
Nad konečným tělesem musí být posloupnost matic A^i pro $i = 1, \ldots, \infty$ cyklická. Spočtěme několik prvních členů této posloupnosti:

$$
\begin{aligned}
A = A^1 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^6 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že perioda této posloupnost je 6. Hledanou mocninu matice tedy spočítáme jako

$$A^{100} = A^{100 \,(\mathrm{mod}\ 6)} = A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Trochu práce si můžeme ušetřit tím, že si uvědomíme, že druhá mocnina má tvar $A^2 = 4I_2$. Tudíž

$$A^{100} = (A^2)^{50} = (4I_2)^{50} = 4^{50} I_n.$$

Tím jsme maticový problém zredukovali na skalární problém. Z Malé Fermatovy věty víme, že $4^6 = 1$ v $\mathbb{Z}_7$, čili

$$4^{50} I_n = 4^{50 \,(\mathrm{mod}\ 6)} I_n = 4^2 I_n = 2I_n.$$

Cv. 5.9 Spočítejte 20^{3332} v tělese $\mathbb{Z}_{31}$.

Řešení:
Z Malé Fermatovy věty víme, že v tělese $\mathbb{Z}_{31}$ je $20^{30} = 1$. Proto

$$20^{3332} = 20^{3332 \,(\mathrm{mod}\ 30)} = 20^2 = 28.$$

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Řešení:
Permutace p zobrazuje $1 \to 2$, dále $2 \to 3$, $3 \to 4$ a $4 \to 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1, 2, 3, 4)$, analogicky druhý cyklus je $(5, 6)$. Tudíž zápis permutace pomoci cyklů je $p = (1, 2, 3, 4)(5, 6)$.

Podobně pro permutaci q máme $1 \to 1$ (první cyklus), $2 \to 3$, $3 \to 2$ (druhý cyklus) a $4 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 4$ (třetí cyklus). Permutaci q lze zapsat pomocí cyklů jako $q = (1)(2, 3)(4, 5, 6)$.

Permutace p je zadána na $n = 6$ prvcích a skládá se ze $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^{n-\textbf{počet cyklů}} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\mathrm{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k permutaci p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p, tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídit sloupce od nejmenšího po největší. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4, 3, 2, 1)(6, 5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzní.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat pomocí popisu přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1, 2, 4, 6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1, 3, 5, 4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Řešení:

Naivní způsob spočítání p^9 je složit postupně permutaci $p^9 = p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p$.

Efektivnější způsob počítání vysokých mocnin (čehokoli) je využití dvojkového zápisu exponentu a iterovaného mocnění na druhou. Konkrétně k permutaci p^9 se dostaneme tak, že spočítáme $p^2 = p \circ p$, následně $p^4 = p^2 \circ p^2$, $p^8 = p^4 \circ p^4$ a nakonec $p^9 = p^8 \circ p$.

V našem případě, kdy mocníme permutace, můžeme využít ještě rozkladu na cykly. Cyklus $p = (u_1, \dots, u_k)$ délky k se při mocnění chová tak, že $p^k = id$ a $p^{k+1} = p$. To nás vede k metodě, kdy budeme mocnit každý cyklus zvlášť a mocninu daného cyklu spočítáme efektivně s využitím modula jeho délky. Konkrétně, $(1, 3, 4)^9 = id$, $(2, 5)^9 = (2, 5)^1 = (2, 5)$ a $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^9 = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^3 = (6, 9)(7, 10)(8, 11)$ Tudíž

$$p^9 = (1)(2, 5)(3)(4)(6, 9)(7, 10)(8, 11).$$

Permutaci p^{-14} určíme stejným způsobem s tím, že uvažujeme i záporné exponenty. Tudíž $(1, 3, 4)^{-14} = (1, 3, 4)^1$, $(2, 5)^{-14} = (2, 5)^0 = id$, $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^{-14} = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^4 = (6, 8, 10)(7, 9, 11)$. Nakonec dostáváme

$$p^{-14} = (1, 3, 4)(2)(5)(6, 8, 10)(7, 9, 11).$$

Abychom určili nejmenší mocninu $k \geq 1$ takovou, že $p^k = id$, podíváme se na jednotlivé cykly a zjistíme, jaké mocniny dají identitu. První cyklus má délku 3, tedy třetí mocnina a jakýkoli její celý násobek dají identitu. Podobně druhý cyklus má délku 2, čili identitu dostaneme pro sudé mocniny, a konečně třetí cyklus délky 6 vede na mocninu 6. Nejmenší společný násobek čísel $2, 3, 6$ je 6, tedy hledané $k = 6$. Při šesté mocnině se první cyklus *protočí* 2-krát, druhý 3-krát a poslední 1-krát.

Cv. 6.3 Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic, a to alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší možný počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Řešení:

Dvě možná řešení jsou:

$$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2).$$

Transpozic musí být alespoň 4. Každá nová transpozice sníží počet cyklů maximálně o 1, takže abychom z identity zkonstruovali cyklus délky 5, potřebujeme alespoň 4 transpozice.

Cv. 6.4 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí nanejvýš $n-1$ transpozic.

Obecně, permutace $p \in S_n$ se skládá z k cyklů. Pomocí kolika transpozic se dá složit? Najděte všechny možnosti.

Řešení:
V předchozím cvičení 6.3 jsme viděli, že každý cyklus délky c lze složit pomocí $c-1$ transpozic. Pokud se tedy permutace p skládá z právě k cyklů, tak ji umíme složit z právě $n-k$ transpozic. Tím pádem každou permutaci lze zložit z maximálně $n-1$ transpozic.

Vždycky lze přidat dodatečné (a v zásadě zbytečné) páry transpozic $(i,j)(i,j)$ a počet transpozic tím navýšit. Není ale možné změnit paritu počtu transpozic (tím by se změnilo znaménko permutace). Možné počty transpozit, ze kterých můžeme p složit, jsou tedy $n-k$, $n-k+2$, $n-k+4, \ldots$

Cv. 6.5 Určete znaménko permutace r zadané tabulkou:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Permutaci r můžeme pomocí cyklů zapsat jako

$$r = \begin{cases} (1,n)(2,n-1)\ldots(\frac{n}{2},\frac{n+2}{2}) & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (1,n)(2,n-1)\ldots(\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2})(\frac{n+1}{2}) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

V prvním případě máme $\frac{n}{2}$ cyklů, v druhém $\frac{n-1}{2}$ cyklů. Celkově tedy dostáváme, že

$$\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (-1)^{n-\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Souhrnně můžeme též psát $\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Cv. 6.6 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1,3)(2,4)(7,8,9,10)$.

Řešení:
Podívejme se nejprve, jak může vzniknout cyklus $(1,3)$. Aby se 1 zobrazilo na 3 v p^2, musí v p být součástí nějaké cyklu $(\ldots,1,a,3,\ldots)$. Podobně aby se 3 zobrazilo na 1, musí být $(\ldots,3,b,1,\ldots)$. Spojením obou úseků dostáváme $(\ldots,1,a,3,b,1,\ldots)$, tedy nutně cyklus $(1,a,3,b)$. V permutaci p^2 se tento cyklus rozpadne na 2 podcykly $(1,3)(a,b)$. Ze struktury p^2 je jediná možnost, že $a = 2, b = 4$ nebo symetricky $a = 4, b = 2$.

Aby se dále prvky 5 a 6 zobrazily v p^2 sami na sebe, musí se buď oba zobrazit sami na sebe už v p, nebo tvořit cyklus o dvou prvcích $(5,c),(6,d)$. Pokud by libovolné z čísel byl součástí delšího cyklu, složením permutace sama se sebou bychom už nedostali (5), resp. (6). Ze struktury p^2 dále nutně vyplývá, že $c = 6$ a $d = 5$, jinak by (d) a (c) nebyly cykly z p^2.

Zbývá určit $p(7),\ldots,p(10)$. Podobně jako v případě prvků 1, 3 odvodíme, že musí existovat úsek $(\ldots,7,e,8,f,9,g,10,h,7,\ldots)$, resp. cyklus $(7,e,8,f,9,q,10,h,7)$, který ale nejsme schopni pouze s pomocí prvků $7, \dots, 10$ zkonstruovat. Z toho důvodu žádná permutace p nesplňuje zadání.

Poznámka. Znaménko permutace p^2 je vždy sudé (pro libovolnou permutaci p), neboť platí $\operatorname{sgn}(p^2) = \operatorname{sgn}(p)\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p)^2 = 1$. Ale zadaná permutace $(1,3)(2,4)(7,8,9,10)$ má znaménko $(-1)^{10-5} = -1$, tudíž nemůže být druhou mocninou žádné permutace.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Řešení:
Abychom dokázali toto tvrzení, stačí ukázat, že složení dvou permutací $p, q \in S_n$ je *prosté* a *na*. Poté se bude jednat o bijekci na konečné množině, což odpovídá definici permutace. Toto půjde jednoduše dokázat z faktu, že obě permutace tyto vlastnosti splňují.

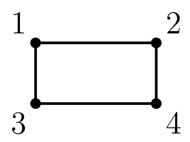
Prosté: Mějme $x, y \in \{1, \dots, n\}$ a nechť platí

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(q(y)) = (p \circ q)(y).$$

Protože zobrazení p je prosté, platí, že nutně $q(x) = q(y)$. Nyní využijeme toho, že je prosté q a tedy platí, že $x = y$. Tedy i zobrazení $(p \circ q)$ je prosté.

Na: Aby platila tato vlastnost, musí pro každé $x \in \{1, \dots n\}$ existovat prvek $y \in \{1, \dots, n\}$ takový, že $(p \circ q)(y) = p(q(y)) = x$. Protože zobrazení p je „na“, tak existuje $z \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $p(z) = x$. Zároveň z vlastnosti na permutace q existuje y, že $q(y) = z$. Toto y splňuje tedy vztah $q(p(y)) = x$.

Cv. 6.8 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.

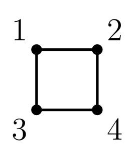


Řešení:
Obdélník má čtyři symetrie:

- identita, která odpovídá permutaci $id = (1)(2)(3)(4)$,
- překlopení podle svislé osy odpovídá permutaci $(1,2)(3,4)$,
- překlopení podle vodorovné osy odpovídá permutaci $(1,3)(2,4)$,
- otočení o $180°$ odpovídá permutaci $(1,4)(2,3)$.

Snadno ověříme, že tato množina permutací je uzavřená na inverze a skládání, čili tvoří podgrupu.

Cv. 6.9 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.



<u>Řešení</u>:

Analogické předchozímu cvičení 6.8. Kromě tamějších symetrií zde máme navíc:

- překlopení podle diagonály, což odpovídá permutaci $(1,4)(2)(3)$,
- překlopení podle šikmé diagonály, což odpovídá permutaci $(1)(4)(2,3)$,
- otočení o $90°$ ve směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1,2,4,3)$,
- otočení o $90°$ proti směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1,3,4,2)$.

Opět ověříme, že tato množina osmi permutací je uzavřená na inverze a skládání, takže tvoří podgrupu.

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Řešení:

(a) Jedná se o vektorový prostor, protože

- $(\mathbb{Z}_p^n, + \mod p)$ je Abelova grupa,
- modulární násobení je asociativní,
- roli neutrálního prvku pro modulární násobení zastává $1 \in \mathbb{Z}_p^n$,
- modulární aritmetika je distributivní.

(b) Jedná se o vektorový prostor, protože $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$ má pro operace sčítání a násobení skalárem stejná vlastnosti jako vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Potenciálně jediný problém by mohl být použití jiného tělesa, protože bychom mohli při násobení skalárem dostat vektory mimo $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, tento problém nenastane.

(c) Narozdíl od předchozího případu zde už problém nastane. Nejedná se o vektorový prostor, protože při násobení vektoru skalárem se nejedná o operaci $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$; můžeme dostat ve vektoru reálné složky. Není splněna uzavřenost množiny na danou operaci.

(d) Není vektorový prostor, protože neplatí asociativita násobení:

$$\alpha \odot (\beta \odot v) = \alpha \odot (-\beta v) = \alpha\beta v \neq -\alpha\beta v = (\alpha\beta) \odot v.$$

Jako konkrétní protipříklad stačí vzít $\alpha = \beta = 1$ a $v = (1,1)^T$.

(e) Není vektorový prostor, protože neplatí distributivita. Pro jakékoli $\beta = -\alpha \neq 0$ dostáváme

$$(\alpha + \beta) \odot v = |0|v = 0 \neq 2|\alpha|v = |\alpha|v + |-\alpha|v = \alpha \odot v + \beta \odot v.$$

Konkrétně například stačí vzít $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $v = (1,1)^T$.

(f) Prvky množiny $U \times V$ jsou uspořádané dvojice (u, v), kde $u \in U$, $v \in V$. Pro $(u, v), (u', v') \in U \times V$ je součet definován takto: $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$. Násobek je definován analogicky $\alpha(u, v) = (\alpha u', \alpha v)$, kde $\alpha \in \mathbb{T}$ a $(u, v) \in U \times V$.

Vlastnosti operací $U \times V$ nad $\mathbb{T}$ plynou z vlastností operací pro jednotlivé prostory U a V, takže se jedná vektorový prostor.

(g) Pokud není uvedeno jinak, uvažujeme přirozené definice operací sčítání a násobení funkcí, tedy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = f(x).$$

Následně o dvou funkcích řekneme, že se rovnají, pokud se rovnají jejich funkční hodnoty na všech $x \in M$. Daná struktura je vektorový prostor, protože platí

i. asociativita sčítání

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

ii. neutrální prvek pro sčítání je funkce $e(x) = o$, kde o je nulový vektor prostoru V,

iii. inverzní prvek f^{-1} k funkci f je $f^{-1}(x) = -1 \cdot f(x)$,

iv. komutativita sčítání

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$

v. asociativita násobení skalárem

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x),$$

vi. neutrální prvek pro násobení skalárem je $1 \in \mathbb{T}$,

vii. distributivita

$$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

viii. distributivita

$$\begin{aligned}(\alpha(f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \\ = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x).\end{aligned}$$

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Řešení:

(a) Např. množina $\{(i, i)^T \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Např. sjednocení dvojice různoběžných přímek procházejících počátkem.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor $\mathbb{R}^2$, je třeba, aby obsahovala $(0, 0)^T$ a byla uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

(a) Nulový vektor v množině pro $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:

- $(s, 5s)^T + (t, 5t)^T = (s + t, 5(s + t))^T$,
- $\alpha(s, 5s)^T = (\alpha s, 5\alpha s)^T$.

Jedná se tedy o vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.

(b) Není podprostorem, neboť $(0, 0)^T$ není součástí množiny.

(c) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1, 1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2, 2)^T$ už nikoli.

(d) Nulový vektor v množina pro $t = 0$, $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:

- $(a - b, 2b)^T + (c - d, 2d)^T = ((a + c) - (b + d), 2(b + d))^T$,
- $\alpha(t - s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

Cv. 7.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor, musí obsahovat nulový vektor a být uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

Pokud dosadíme do soustavy rovnic vektor $x = (0, \ldots, 0)^T$, dostáváme na levé straně soustavy nuly, tedy nulový vektor je řešením libovolné soustavy rovnic s nulovou pravou stranou.

Uzavřenost na násobky. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $Ax = 0$, po dosazení αx, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

Obdobně pro součty. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic platí $Ax = Ay = 0$. Tudíž

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

- Triviální příklady jsou celý prostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$, nebo množina $\{0_{n\times n}\}$.
- Netriviálním příkladem jsou poté horní (nebo dolní) trojúhelníkové matice, neboť násobení skalárem, ani součet dvou matic nezmění nulovost prvků pod diagonálou.
- Z podobného důvodu tvoří podprostor diagonální matice.
- Obecněji bychom mohli vzít libovolnou podmnožinu matic, kde určité členy zafixujeme rovny 0 a zbytek členů bude nabývat libovolných hodnot.
- Jiným příkladem jsou magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo).

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Řešení:

(a) Ne, nejsou uzavřené na součet.
Například $(0,1,0,1,\dots) + (1,0,1,0,\dots) = (1,1,1,1,\dots)$
(b) Ano, snadno nahlédneme.
(c) Ne, nejsou uzavřené na součty.
Například $(1,0,0,0,\dots) + (0,0,1,1,\dots) = (1,0,1,\dots)$.
(d) Ano, snadno nahlédneme.

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,
(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

Řešení:

Ukážeme dva možné způsoby řešení, podle toho, jakou charakterizaci lineárního obalu použijeme.

První způsob. Podle první definice je lineární obal $\mathrm{span}(M)$ množiny M tvořený průnikem všech podprostorů, obsahujících množinu M. Jinými slovy, $\mathrm{span}(M)$ je (co do inkluze) nejmenší podprostor obsahující M.

(a) Ano. Množina $\mathrm{span}(M)$ je již podprostor, tudíž jeho lineární obal je on sám.

(b) Ano. Pokud podprostor U obsahuje množinu N, pak obsahuje i množinu M. Tudíž při konstrukci lineárního obalu $\mathrm{span}(M)$ děláme průnik z týchž podprostorů, jako při konstrukci $\mathrm{span}(N)$, plus případně ještě z nějakých navíc. Proto $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

(c) Tento vztah obecně neplatí. Vezměme například množiny $M = V$ a $N = M \setminus \{o\}$. Platí, že $\mathrm{span}(M) = \mathrm{span}(N)$, tím pádem i $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$, ale zároveň neplatí $M \subseteq N$.

(d) Vztah obecně neplatí. Například pro $M = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ a $N = \{(1,1)^T\}$. Zatímco $\mathrm{span}(M \cap N) = \{o\}$, tak $\mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N) = \mathrm{span}(N) = \{(c,c)^T;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Druhý způsob. Zde vycházíme z tvrzení, že $x \in \mathrm{span}(M)$ právě tehdy, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, vektory $x_1, \dots, x_k \in M$ a koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i.$$

(a) Ukážeme nejprve, že $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, tedy že

$$x \in \mathrm{span}(M) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M)).$$

Protože $x \in \mathrm{span}(M)$, dá se vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$. Protože ale $x_i \in \mathrm{span}(M)$ a platí $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, dostáváme z tvrzení výše, že $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$.

Naopak pokud $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, poté existují $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{span}(M)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$. Každé $x_i \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij}$ pro jisté $y_{ij} \in M$. Po dosazení dostáváme

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell_i} (\alpha_i \beta_{ij}) y_{ij}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $y_{ij} \in M$ s koeficienty $\alpha_i \beta_{ij}$, tedy $x \in \mathrm{span}(M)$.

(b) Každý vektor $x \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro určité $x_i \in M$ a $k \in \mathbb{N}$. Protože $M \subseteq N$, platí také, že $x_i \in N$, tedy $x \in \mathrm{span}(N)$.

(c) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

(d) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

Aby dané vektory generovaly $\mathbb{R}^2$, musí jít každý vektor $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud rovnost vektorů rozepíšeme po složkách, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b, \end{aligned}$$

kde α, β jsou neznámé. Maticově můžeme soustavu přepsat a vyřešit jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right).$$

Protože je matice soustavy regulární, má soustava jediné řešení pro jakékoli hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Každý vektor lze tedy pomocí zadané dvojice jednoznačně generovat. K tomuto závěru nepotřebujeme znát přesný tvar řešení soustavy. Na druhou stranu, řešení soustavy nám dává dodatečnou informaci, a to koeficienty příslušné lineární kombinace. V našem případě je řešení $\alpha = -(2a + \frac{3b}{2})$, $\beta = \frac{2a-b}{2}$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1,2,3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1,1,1)^T, (2,1,3)^T, (3,1,5)^T$

(b) $(2,1,3)^T, (3,1,2)^T, (1,1,1)^T$.

Řešení:

K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right),$$

která nemá řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Hledaná lineární kombinace tudíž neexistuje.

(b) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

která má jednoznačné řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $(1, -1, 2)^T$, tedy platí, že

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Řešení:

1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)^T$, $(1, -1, 1)^T$, $(3, 2, -2)^T$.

(b) $(2, 0, 3)^T$, $(1, -1, 1)^T$, $(0, 2, 1)^T$.

Řešení:

Vektory $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud jediná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$$

má všechny koeficienty $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Problém nalezení koeficientů této lineárně kombinace převedeme na hledání řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Převedením na řešení soustav lineárních rovnic dostáváme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Jediným řešením této soustavy je vektor $(0, 0, 0)^T$, vektory jsou proto lineárně nezávislé.

(b) Opět sestavíme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kterou převedeme na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory jsou proto lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že množina řešení soustavy je $\{(-x_3, 2x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Tedy například pro $x_3 = 1$ máme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.3 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$,

(d) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Řešení:

(a) Lineárně závislé, neboť

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot o = o.$$

(b) Lineárně nezávislé, neboť jsou to ty samé vektory, jenom v jiném pořadí. Změnou pořadí se lineární (ne)závislost vektorů nemění (proč?).

(c) Zde už to očividné není, tak postupujeme obdobně jako v předchozím cvičení 8.2. Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$0 = \alpha_1 u + \alpha_2(u+v) + \alpha_3(u+w) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 0$ a tedy i $\alpha_1 = 0$. Proto je množina vektorů $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(d) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$0 = \alpha_1(u-v)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(v-w) = (\alpha_1+\alpha_2)u+(-\alpha_1+\alpha_3)v+(-\alpha_2-\alpha_3)w.$$

Z lineární nezávislosti u, v, w dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je množina $\{(\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3)^T;\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{u-v, u-w, v-w\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $\alpha_3 = 1$ máme

$$1 \cdot (u-v) - 1 \cdot (u-w) + 1 \cdot (v-w) = o.$$

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Řešení:
Obecně dle definice se dá odvodit, že nezávislost se přenáší „dolů" a závislost „nahoru". Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1 \dots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$

Vezměme $\beta_1, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$ a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.2, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé. Nad $\mathbb{Z}_3$ jsou ale lineárně závislé, například

$$1 \cdot (0,1,1,1)^T + 1 \cdot (1,0,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0,1)^T + 1 \cdot (1,1,1,0)^T = o.$$

Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„$\Rightarrow$“ Z definice spojení prostorů se každý vektor $x \in U + V$ dá zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$. Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru x,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V. Z předpokladu je $U \cap V = \{0\}$, čili $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z toho ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x je tedy jednoznačné. Spor.

„$\Leftarrow$“ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor $w \in U \cap V$. Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z U, druhý sčítanec je z V):

$$w = w + o = o + w.$$

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x-1$, $g(x) = x-2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) + \alpha_3 \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme

$$\alpha_1 \cdot (2x-1) + \alpha_2 \cdot (x-2) + \alpha_3 \cdot 3x = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy, když je nulový absolutní člen i koeficient u proměnné x:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množina řešení této soustavy je $\{(-2x_3, x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $x_3 = 1$ máme

$$-2 \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (3x) = 0.$$

(b) Opět hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má jediné řešení $(0, 0, 0)^T$, polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, aby rovnice byla splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové $x \in \mathbb{R}$, pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty α_1, α_2. Pokud dosadíme $x = 0$, dostaneme $\alpha_2 = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak nutně $\alpha_1 = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Aby byla rovnice splněna, nutně musí $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Zároveň vidíme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

Řešení:

(a) Například e_1, e_2, e_3, o (ten poslední).

(b) Například e_1, e_2, e_3, $2e_3$ (ty poslední dva).

(c) Například e_1, e_2, e_3, $e_2 + e_3$ (ty poslední tři).

(d) Například e_1, e_2, e_3, $e_1 + e_2 + e_3$.

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$,

(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

(b) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

Tato vlastnost platí obecně. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, pak vektorový prostor $\mathbb{T}^2$ nad $\mathbb{T}$ má dimenzi 2 a jeho bází je například kanonická báze e_1, e_2. Důkaz: vektory e_1, e_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé a každý vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{T}$ lze napsat $v = v_1(1,0)^T + v_2(0,1)^T = v_1e_1 + v_2e_2$.

(c) Bázi tvoří například $e_1, e_2, (i,0)^T, (0,i)^T$. Dimenze je tudíž 4.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory. Každý vektor $v \in \mathbb{C}^2$ je tvaru $v = (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i)^T$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Můžeme tento vektor tedy vyjádřit

$$v = a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci vektorů (s reálnými koeficienty!)

$$a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T = (0,0)^T, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice lze ekvivalentně psát $(a_1 + b_1i, a_2 + b_2i)^T = (0,0)^T$ a je splněna právě tehdy, když $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

(d) Bázi tvoří například $1, x, x^2$. Dimenze je tudíž 3.

(e) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 4.

(f) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 3.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T, (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Řešení:

Chceme vyjádřit vektor $v = (-1, 5, 3)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 2)^T$, $(4, 1, 3)^T$, čili

$$(-1, 5, 3)^T = \alpha(1, 2, 2)^T + \beta(4, 1, 3)^T.$$

To je vlastně soustava tří rovnic o dvou neznámých (α, β), kterou můžeme zapsat maticově

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Vyřešením soustavy zjistíme, že existuje jediné řešení $\alpha = 3$, $\beta = -1$. To jsou i hledané souřadnice $[v]_B = (3, -1)^T$.

Cv. 9.3 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$.

<u>Řešení</u>:
Postupujeme analogicky, jako v předchozí úloze. Chceme vyjádřit vektor $p(x) = x^2 + 2$ jako lineární kombinaci vektorů $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$, čili

$$x^2 + 2 = \alpha(x^2 + 1) + \beta(x - 2) + \gamma(2x^2 + x - 1).$$

Po úpravě

$$x^2 + 2 = (\alpha + 2\gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + (\alpha - 2\beta - \gamma).$$

To nám dá soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejíž maticové vyjádření je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Matice soustavy je regulární, a tudíž soustava má jediné řešení, a to $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Hledané souřadnice jsou $[p(x)]_B = (3, 1, -1)^T$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,

(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,

(c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

<u>Řešení</u>:
Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' můžeme určit standardním způsobem, ale vzhledem k tomu, jak báze B' vypadá, tak souřadnice odvodíme přímo. K tomu nám pomůže fakt, že ze zadání víme $v = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4 = \sum_{i=1}^{4} a_iz_i$.

(a) Protože můžeme psát $v = a_4z_4 + a_3z_3 + a_2z_2 + a_1z_1$, tak hledané souřadnice jsou$[v]_{B'} = (a_4, a_3, a_2, a_1)^T$.

(b) Chceme vyjádřit vektor jako

$$v = ?\,(z_1 + z_4) +\ ?\,z_2 +\ ?\,z_3 +\ ?\,z_4,$$

přičemž víme

$$v = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4.$$

Zde se nabízí vhodně přičíst a odečíst hodnotu $a_1 z_4$ a vyjádřit vektor jako

$$v = a_1(z_1 + z_4) + a_2 z_2 + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4,$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_2, a_3, a_4 - a_1)^T$.

(c) Analogickou úvahou vyjádříme vektor jako

$$\begin{aligned} v &= a_1(z_1 + z_4) + a_2 z_2 + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4 + a_2 z_2 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3(z_2 + z_3) + (a_4 - a_1) z_4 + (a_2 - a_3) z_2, \end{aligned}$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:
Budeme postupovat výčtem možných hodnot pro dimenzi podprostoru. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$, dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem (těch je nekonečně mnoho), a dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{R}^2$.

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Řešení:
Opět rozdělíme podprostory podle jejich dimenze. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$. Dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{Z}_p^2$. Dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem. Přímka má normovaný směr buď $(0, 1)$ nebo $(1, a)$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Celkem dostáváme, že počet podprostorů je $p + 3$.

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Řešení:

(a) Protože oba prostory U, V jsou podprostory prostoru $U + V$, musí platit $\dim U \leq \dim(U + V)$ a $\dim V \leq \dim(U + V)$. To nám dává první odhad zdola $\dim(U+V) \geq 8$. Zároveň není těžké nahlédnout, že je odhad těsný, to znamená, že se někdy může nabýt jako rovnost. Uvažujme například prostor

$W = \mathbb{R}^{13}$ a jeho podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_8\}$. Potom $U + V = V$, čili $\dim(U + V) = \dim V = 8$.

Pro odhad shora stačí využít toho, že oba prostory U, V jsou podprostory prostoru W. Proto musí platit $\dim(U + V) \leq \dim W$. To vede na odhad $\dim(U+V) \leq 13$. I tento odhad je těsný. Uvažujme opět prostor $W = \mathbb{R}^{13}$, ale tentokrát s podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_6, \ldots, e_{13}\}$. V tomto případě $U + V = W$, a tak $\dim(U + V) = \dim W = 13$.

(b) Zde využijeme větu o dimenzi spojení a průniku podprostorů, která říká

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

V našem případě má věta tvar

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 15 - \dim(U + V).$$

Pro odhady zdola a shora využijme předchozí odhady na $\dim(U + V)$ a dostaneme

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 8 = 7$$

a

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 13 = 2.$$

Odhady jsou opět těsné, o čemž nás přesvědčí stejné příklady jako v předchozím bodu.

Direktní součet

Cv. 9.8 Nechť U, V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u+v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Řešení:

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme pro spor, že existují dvě různá vyjádření součtu $w = u + v = u' + v'$, kde $u, u' \in U$ a $v, v' \in V$. Pak ale vektor $z := u - u' = v - v'$ je nenulový a nachází se v průniku $U \cap V$, což je spor s předpokladem.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Dokažte: Je-li $u_1, \ldots, u_m$ báze U a $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ je báze W.

Řešení:

Protože vektory $u_1, \ldots, u_m$ generují podprostor U a vektory $v_1, \ldots, v_n$ generují podprostor V, tak vektory $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ musí generovat prostor $W = U + W$.

Z předpokladu (a definice direktního součtu podprostorů) je $U \cap V = \{o\}$, čili $\dim(U \cap V) = 0$. Podle věty o dimenzi spojení a průniku podprostorů máme

$$m + n = \dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U + V) = \dim W.$$

Prostor W má tedy dimenzi $m+n$. Ale zároveň víme, že množina jeho generátorů $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ má velikost také $m + n$. Proto musí tyto generátory tvořit bázi prostoru W.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$*:*

(a) vektor v nepatří do jádra matice A, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$*:*

(a) vektor v patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$*:*

(a) vektor v nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Převedeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru $\mathrm{RREF}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1,2,0,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice $\mathrm{RREF}(A)$ je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\mathrm{RREF}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice $\mathrm{RREF}(A)$, proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,
(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení:

(a) Tento příklad je zaměřený na kreativitu a ne na postup podle šablony. Proto popíšeme jen základní myšlenky, které pomohou hledanou matice najít. Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Dále, z podmínek na řádkový prostor dostáváme $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, neboli stačí, aby matice A měla lineárně nezávislé sloupce. Pokud dáme vektory z podmínky na $\mathcal{S}(A)$ přímo do sloupců matice A, získáme požadovanou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice ale není zdaleka jednoznačná. Požadovanou vlastnost splňují další matice, jako například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

V našem případě dostáváme $1 + 1 = \dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = 3$. Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$,

(b) $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\operatorname{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani tato opačná implikace. Například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B) = A$, ale přitom

$$\operatorname{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Řešení:

Prostor V odpovídá množině řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right),$$

to znamená jádru matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Tato matice má rozměr $1 \times n$ a má hodnost 1. Pro dimenzi jádra použijeme vzoreček (věta o dimenzi jádra a hodnosti matice):

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A) = n - 1.$$

Závěr: Hledaná dimenze je tedy $n + 1$.

Kdybychom chtěli najít i bázi, tak jednoduše vyřešíme soustavu $Ax = 0$ pomocí Gaussovy eliminace. Bázi tak tvoří například vektory $(1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, …, $(0 \ldots, 0, 1, -1)^T$.

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T,\ v_2 = (2, 2, 3, 3)^T,\ v_3 = (1, -1, 2, 1)^T,\ v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:

Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice A, kterou převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Připomeňme, že elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost a nezávislost mezi sloupci, a to dokonce i konkrétní lineární kombinace. Tudíž z matice $\mathrm{RREF}(A)$ snadno vyčteme nejen bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$, ale i hledané souřadnice.

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice $\mathrm{RREF}(A)$ dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, neboť platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)^T$.

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Řešení:

(a) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \dots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\mathrm{Ker}(AB) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$, a tedy můžeme psát $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Ker}(B)$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je

$$\dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\mathrm{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x, y) = (x, y + 3)^T$,
(b) $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$,
(c) $f(x, y) = (0, 0)^T$,
(d) $f(x, y) = (x^2, y)^T$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x, y) = (x, y + 3)^T$ není lineární, protože nulový vektor nezobrazuje na nulový vektor.

(b) Zobrazení $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$ je lineární. Ověříme obě podmínky z definice.

Součet. Uvažujme dva vektory (x, y) a (x', y'). Jejich součet se zobrazí na vektor

$$f((x, y) + (x', y')) = f(x + x', y + y') = ((x + x') + 2(y + y'), (y + y'))^T = \\ = (x + 2y, y)^T + (x' + 2y', y')^T = f(x, y) + f(x', y').$$

Násobek. Uvažujme vektor (x, y) a skalár α. Pak vektor $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ se zobrazí na vektor

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + 2(\alpha y), \alpha y)^T = \alpha(x + 2y, y)^T = \alpha f(x, y).$$

(c) Zobrazení $f(x, y) = (0, 0)^T$ je lineární. Vlastnosti z definice lineárního zobrazení se snadno ověří.

(d) Zobrazení $f(x, y) = (x^2, y)^T$ není lineární. Například pro vektor $(x, y) = (1, 0)$ a skalár $\alpha = 2$ dostáváme

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = f(2, 0) = (4, 0)^T,$$

ale

$$\alpha f(x, y) = 2f(1, 0) = 2(1, 0)^T = (2, 0)^T.$$

Čili obecně $f(\alpha(x, y)) \neq \alpha f(x, y)$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,
(b) $f(A) = I_n$,
(c) $f(A) = A^2$,
(d) $f(A) = a_{11}$,

(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Řešení:

(a) Zobrazení $f(A) = A^T$ je lineární, což plyne z vlastností maticové transpozice:
$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

(b) Zobrazení $f(A) = I_n$ není lineární, protože nezobrazuje nulovou matici na nulovou.

(c) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme
$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

(d) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

(e) Zobrazení $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$ není lineární. Například pro $A = B = I_n$ máme
$$f(A+B) = I_n \neq I_n + I_n = f(A) + f(B).$$

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Vyjdeme z definice, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. V našem případě potřebujeme vypočítat obraz kanonické báze, čili
$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,1)^T, \\ f(e_2) &= f(0,1) = (1,-1)^T. \end{aligned}$$

Tyto vektory tvoří sloupce hledané matice
$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vyjdeme z předpisu $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$, který chceme vyjádřit jako $f(x,y) = A(x,y)^T$ pro určitou matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Tedy
$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Není těžké nahlédnout porovnáním koeficientů u x, y, že rovnost splňuje matice
$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1,1,2)^T$ při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1,0,0) = (1,1)^T,\ f(0,1,0) = (-1,2)^T,\ f(0,0,1) = (0,0)^T.$$

Řešení:

Předvedeme dva možné způsoby, jak postupovat.

(a) První způsob využívá matici zobrazení. Sestavíme proto nejprve matici zobrazení vzhledem ke kanonické bázi. Protože máme zadány obrazy kanonické bázi, stačí tyto obrazy poskládat do sloupců matice. Tedy

$$_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledaný obraz pak dostaneme vynásobením s maticí zobrazení:

$$f(v) = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} \cdot [v]_{\mathrm{kan}} = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Druhý způsob vychází přímo z definice lineárního zobrazení. Protože

$$v = (-1,1,2)^T = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3,$$

platí

$$\begin{aligned} f(v) &= f(-1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) = -1 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 2 \cdot f(e_3) = \\ &= -1(1,1)^T + 1(-1,2)^T + 2(0,0)^T = (-2,1)^T. \end{aligned}$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

(b) Projekce na osu x.

(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.

(d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Stačí zobrazit jednotkové vektory $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$ a jejich obrazy tvoří sloupce hledané matice.

(a) Vektor $(1,0)^T$ se otočí na $(0,1)^T$ a vektor $(0,1)^T$ se otočí na $(-1,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Vektor $(1,0)^T$ se projektuje na $(1,0)^T$ a vektor $(0,1)^T$ se projektuje na $(0,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vektor $(1,0)^T$ se otočí na $(0,1)^T$, který se pak projektuje na $(0,0)^T$. Vektor $(0,1)^T$ se otočí na $(-1,0)^T$ a následně projektuje na $(-1,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Vektor $(1,0)^T$ se projektuje na $(1,0)^T$, který se pak otočí na $(0,1)^T$. Vektor $(0,1)^T$ se projektuje na $(0,0)^T$ a následně otočí na $(0,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad opět ilustruje, že skládání zobrazení není komutativní operace, stejně jako a součin matic.

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,1,1)^T, (0,1,-1)^T, (2,0,1)^T\}, \quad B_2 = \{(3,2,2)^T, (1,0,1)^T, (1,2,2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.

(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1.

(c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)^T$ vzhledem k bázi B_1.

(d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1.

Řešení:
Obecně má matice přechodu od báze $B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$ do báze $B_2 = \{c_1, \dots, c_n\}$ předpis

$$_{B_2}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_{B_2} & [b_2]_{B_2} & \dots & [b_n]_{B_2} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

(a) Chceme matici přechodu $_{\text{kan}}[id]_{B_1}$. Podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat matici

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_{\text{kan}} & [b_2]_{\text{kan}} & \dots & [b_n]_{\text{kan}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy pouze vzít bázické vektory B_1 a dát je do sloupečků matice,

$$_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Chceme matici přechodu $_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. První možností je postupovat podle předpisu výše, tedy zkonstruovat matici

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [e_1]_{B_1} & [e_2]_{B_1} & \dots & [e_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

To odpovídá hledání koeficientů vektorů e_i při bázi B_1, tedy problému, který umíme převést na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jednotlivými řešeními této soustavy jsou vektory $\frac{1}{3}(-1,1,2)^T$, $\frac{1}{3}(2,1,-1)^T$ a $\frac{1}{3}(2,-2,-1)^T$. Dostáváme tedy matici

$$ {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. $$

Druhý způsob by bylo využít vztahu $({}_{B_1}[id]_{B_2})^{-1} = {}_{B_2}[id]_{B_1}$. Všimněme si ovšem, že výpočet inverze vede v našem případě na řešení stejné soustavy rovnic, jako při prvním způsobu výpočtu.

(c) Opět můžeme problém řešit dvěma způsoby. První by byl přímo z definice hledat koeficienty zadaného vektoru vůči bázi, který vede na řešení soustavy

$$ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right). $$

V našem případě bude jednodušší využít vztahu $[x]_{B_1} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot [x]_{\text{kan}} = {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot x$, tedy

$$ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

(d) Chceme matici ${}_{B_1}[id]_{B_2}$. Ukážeme dva postupy.

První způsob je z definice matice zobrazení. Z předpisu výše musíme zkonstruovat matici

$$ \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [c_1]_{B_1} & [c_2]_{B_1} & \dots & [c_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}. $$

Podobně jako v podúloze (b) vede tento problém na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right). $$

Jednotlivými řešeními jsou vektory $\frac{1}{3}(5,1,2)^T$, $\frac{1}{3}(1,-1,1)^T$ a $\frac{1}{3}(7,-1,-2)^T$. Dostáváme tedy matici

$$ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. $$

Druhý způsob využívá toho, že už známe konkrétní hodnoty matice ${}_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Můžeme pak snadno spočítat

$$ \begin{aligned} {}_{B_1}[id]_{B_2} &= {}_{B_1}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_2} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3.

Řešení:
Matici přechodu bychom mohli nalézt stejným způsobem, jako v předchozí úloze. Alternativně nám stačí si uvědomit, že jediné, co se na bázi mění je pořadí vektorů, tedy v důsledku toho i pořadí souřadnic vektorů. Zatímco tedy původně byly souřadnice vektorů b_1, b_2, b_3, b_4 vůči první bázi vektory

$$(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T,$$

vůči druhé bázi dostáváme vektory

$$(0,0,1,0)^T, (1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T, (0,1,0,0)^T.$$

Matice přechodu bude mít proto předpis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B_1 = \{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\}, \quad B_2 = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}.$$

Řešení:
Postup je úplně stejný jako v předchozích úlohách. Hledáme souřadnice bázických vektorů B_1 vůči bázi B_2. Pro vektor x^2+1 řešíme

$$x^2+1 = \alpha_1(x^2+2x+1) + \alpha_2(2x^2+1) + \alpha_3(x^2-x).$$

Dva polynomy se rovnají, pokud se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin x, rovnice je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ta má řešení $(-1,2,-2)^T$. Obdobně lze spočítat souřadnice $[x^2-3x+1]_{B_2} = (-4,5,-5)^T$ a $[x^2+x+3]_{B_2} = (-4,7,-9)^T$. Dostáváme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Všechna tři řešení můžeme opět spočítat naráz pomocí jedné soustavy se třemi pravými stranami. Pokud tedy rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

převedeme na RREF tvar $(I_3 \mid A)$, potom v pravé části vyčteme hledanou matici A.

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1,-1,1)^T, \quad f(e_2) = (0,1,1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,-1)^T, (1,1)^T\}, \quad B_2 = \{(1,-1,1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}.$$

Spočítejte:

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$.

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$.

(c) matici zobrazení od kanonické bázi k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$.

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Řešení:

Obecně má maticová reprezentace zobrazení $f\colon U \to V$ od báze $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ do báze $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ předpis

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(u_1)]_{B_V} & [f(u_2)]_{B_V} & \dots & [f(u_n)]_{B_V} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

(a) Chceme matici ${}_{kan}[f]_{kan}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\begin{pmatrix} | & | \\ [f(e_1)]_{\text{kan}} & [f(e_2)]_{\text{kan}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Sloupce $[f(e_i)]_{kan} = f(e_i)$ dostáváme přímo ze zadání. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Chceme matici ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} \quad \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\text{kan}} \right).$$

Z vlastností lineárního zobrazení dostáváme

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(e_1) - f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice má tedy tvar

$$_{\text{kan}}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativně můžeme hledanou matici dostat rozdělením na jednodušší části s využitím matice složeného zobrazení:

$$_{\text{kan}}[f]_{B_1} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Chceme matici $_{B_2}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\begin{pmatrix} | & | \\ [f(e_1)]_{B_2} & [f(e_2)]_{B_2} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Souřadnice $[(1,-1,1)^T]_{B_2}$, $[(0,1,1)^T]_{B_2}$ můžeme získat jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

V tomto případě si také stačí uvědomit, že $f(e_1)$ odpovídá prvnímu bázickému vektoru B_2 a $f(e_2)$ odpovídá třetímu bázickému vektoru B_2, jejich souřadnice budou proto $(1,0,0)^T$, resp. $(0,0,1)^T$. Výsledná matice má proto tvar

$$_{B_2}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět je užitečné ukázat i alternativní způsob pomocí skládání jednodušších zobrazení:

$$_{B_2}[f]_{\text{kan}} = {}_{B_2}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde ale musíme invertovat matici $_{B_2}[id]_{\text{kan}} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B_2})^{-1}$, takže pokud inverzi nemáme předem spočítanou, tak tento postup efektivnější nebude.

(d) Chceme matici $_{B_2}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \quad \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \right).$$

Z podúlohy (*b*) již známe obrazy $f(1,-1)^T = (1,-2,0)^T$, $f(1,1)^T = (1,0,2)^T$. Ty tedy stačí vyjádřit v souřadnicích báze B_2. Souřadnice nalezeneme jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Jednotlivá řešení jsou vektory $(1, 0, -1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, výsledná matice má proto tvar

$$_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím předchozích bodů hledanou matici můžeme také spočítat takto:

$$_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_2}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$$_{B}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad _{B}[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete $_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Řešení:

K řešení můžeme využít vztahu $_{B_3}[g \circ f]_{B_1} = {}_{B_3}[g]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1}$, v našem případě ve tvaru

$$_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[g]_{B} \cdot {}_{B}[f]_{\text{kan}}.$$

Matici $_{\text{kan}}[g]_B$ můžeme nejsnadněji zkonstruovat pomocí matic přechodu jako

$$_{\text{kan}}[g]_B = {}_{\text{kan}}[id]_B \cdot {}_{B}[g]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_B.$$

Dostáváme tedy

$$_{\text{kan}}[g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice proto je

$$_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice RREF(A) reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Řešení:

Vztah mezi A a RREF(A) lze vyjádřit jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = E_k \dots E_1 \cdot A,$$

kde matice E_i reprezentují jednotlivé elementární řádkové úpravy. Pro nás je klíčové, že tyto matice jsou regulární a každou regulární matici můžeme chápat jako matici přechodu

$$E_i = {}_{B_i'}[id]_{B_i}$$

mezi určitými bázemi. Podobně můžeme vyjádřit souhrnně matici E

$$E = {}_{B_V'}[id]_{B_V}$$

pro vhodnou bázi B_V' prostoru V. Proč? Protože

$${}_{B_V'}[id]_{B_V} = {}_{B_V'}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B_V'})^{-1} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_V},$$

dostáváme

$${}_{\text{kan}}[id]_{B_V'} = {}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1},$$

a tudíž bázi B_V' (přesně řečeno její souřadnice vzhledem ke kanonické bázi) vyčteme ze sloupců matice ${}_{\text{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1}$.

Odstupňovaný tvar matice A tedy můžeme chápat jako

$$\text{RREF}(A) = E \cdot A = {}_{B_V'}[id]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_V'}[f]_{B_U},$$

tedy maticovou reprezentaci stejného zobrazení, která se liší pouze ve výstupní bázi.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B}[f]_{B}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B'?

Řešení:

Máme dvě možnosti, jak dojít k řešení:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B}[f]_{B}$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}[id]_{B} \cdot {}_{B}[f]_{B} \cdot {}_{B}[id]_{B'}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B' se zobrazí maticí přechodu ${}_{B}[id]_{B'}$ vůči bázi B, následně se transformuje maticí ${}_{B}[f]_{B}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B'}[id]_{B}$ vůči bázi B'.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení a je jich tedy nekonečně mnoho.

13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

Obraz a jádro

Cv. 13.1 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

Matice A patří do jádra f, pokud $f(A) = 0_{2\times 2}$. Naopak matice A patří do obrazu zobrazení f, pokud existuje matice B taková, že $f(B) = A$.

(a) Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0_{2\times 2}$. Naopak nepatří do obrazu, protože by musela existovat B, že

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

To ale není možné, protože pro prvek na pozici $(1,1)$ by musel být splněn vztah

$$0 = b_{11} - b_{11} = 1.$$

(b) Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).

(c) Patří do jádra, neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naopak nepatří do obrazu, protože na diagonále jsou nenulové prvky.

(d) Nepatří do jádra, neboť

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aby matice patřila do obrazu, musela by existovat B taková, že

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rozepsáním po složkách dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_{11} - b_{11} &= 0, \\ b_{12} - b_{21} &= 1, \\ b_{21} - b_{12} &= -1, \\ b_{22} - b_{22} &= 0. \end{aligned}$$

První a poslední rovnice odpovídají $0 = 0$ a zbylé dvě rovnice jsou ekvivalentní. Soustava se tedy zjednoduší na jedinou rovnici

$$b_{12} - b_{21} = 1.$$

Hledaných matic je tedy nekonečně mnoho a jsou tvaru

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21}+1 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad b_{11}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}.$$

Příkladem jedné konkrétní matice B může být

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Závěr: Daná matice patří do obrazu.

Cv. 13.2 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\operatorname{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \operatorname{Ker}(f^n)$.

Řešení:
Pokud $v \in \operatorname{Ker}(f^{n-1})$, pak ze vztahu $f^{n-1}(v) = o$ platí

$$f^n(v) = f(f^{n-1}(v)) = f(o) = o.$$

Proto také $v \in \operatorname{Ker}(f^n)$.

Cv. 13.3 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1)^T, \quad f(0,1,1) = (-1,0)^T, \quad f(1,1,0) = (1,0)^T.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \operatorname{Ker}(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\operatorname{Ker}(f)$.

Řešení:

(a) Pro jednodušší manipulaci si vyjádříme zobrazení pomocí maticové reprezentace ${}_{\text{kan}}[f]_B$, kde $B = \{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,0)^T\}$. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvedená matice má dimenzi řádkového (a tedy i sloupcového) prostoru rovnou 2 a dimenzi jádra rovnou 1. Tyto dimenze odpovídají $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \operatorname{Ker}(f)$.

(b) V předchozí úloze jsme ukázali, že $\dim f(\mathbb{R}^3) = 2$. Protože $f(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^2$, dostáváme dokonce $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$. Libovolná báze prostoru $\mathbb{R}^2$ je proto bází obrazu $f(\mathbb{R}^3)$. Obecně bázi obrazu můžeme zkonstruovat z obrazů báze původního prostoru, tedy vektorů $(0,1)^T, (-1,0)^T, (1,0)^T$. V tomto případě je druhý vektor závislý na třetím, jeho odstraněním dostáváme bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Pro určení báze jádra můžeme využít maticové reprezentace a nalézt řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0.$$

Množina řešení má tvar $\{(0, x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Pozor, tato množina odpovídá množině *souřadnic* bází vzhledem k bázi B, protože

$$o = [f(x)]_{\mathrm{kan}} = {}_{\mathrm{kan}}[f]_B \cdot [x]_B.$$

Zvolíme-li z jádra matice například vektor $[x]_B = (0,1,1)^T$, odpovídající vektor $x \in \mathrm{Ker}(f)$ dopočítáme jako

$$x = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.4 Co je obrazem prostoru $\mathrm{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x,\ \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x,\ \cos x\}$?

<u>Řešení</u>:
Z definice konstrukce maticové reprezentace lineárního zobrazení vůči daným bázím lze z maticové reprezentace vyčíst předpis dané funkce

$$\begin{aligned} f(\cos x - \sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 1 \cdot \cos x = \cos x, \\ f(\sin x) &= 0 \cdot (\cos x + \sin x) + 0 \cdot \cos x = 0. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že obraz bude

$$\mathrm{span}\{\cos x,\ 0\} = \mathrm{span}\{\cos x\}.$$

Jádro pak má tvar $\mathrm{span}\{\sin x\}$.

Cv. 13.5 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U;\ f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U.

<u>Řešení</u>:
Stačí ukázat, že $o \in f^{-1}(W)$ a že je tato množina uzavřená na operace. Protože je W vektorový podprostor, obsahuje o. Z vlastností lineárního zobrazení je jedním z vektorů x splňujících $f(x) = o$ i nulový vektor o. Tedy $o \in f^{-1}(W)$.

Mějme dále $x, y \in f^{-1}(W)$. Z definice $f^{-1}(W)$ existují $a, b \in W$ takové, že $f(x) = a$ a $f(y) = b$. Protože W je vektorový podprostor, také $a + b \in W$. Úpravami dostáváme

$$a + b = f(x) + f(y) = f(x + y).$$

Dle definice vektor $x + y \in f^{-1}(W)$, množina je proto uzavřená na sčítání.

Obdobně mějme $x \in f^{-1}(W)$ a skalár α. Platí, že existuje $y \in W$, že $f(x) = y$ a také platí $\alpha y \in W$. Pomocí úprav

$$\alpha y = \alpha f(x) = f(\alpha x)$$

a definice $f^{-1}(W)$ vektor $\alpha x \in f^{-1}(W)$, množina je proto uzavřená na násobení.

Zobrazení prosté a „na“

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

(a) bylo prosté a „na“,

(b) bylo prosté, ale nebylo „na“,

(c) nebylo prosté, ale bylo „na“,

(d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Řešení:

Toto je kreativní příklad. Detailnější podmínky na matici A, aby příslušné lineární zobrazení bylo / nebylo prosté či „na“ rozebereme později ve Cv. 13.8.

(a) Například $A = I_2$. Zobrazení je tudíž identita a zřejmě je prosté i „na“.

(b) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení není „na“, protože sloupce matice A vygenerují pouze dvoudimenzionální podprostor v prostoru $\mathbb{R}^3$. Na druhou stranu, zobrazení je prosté, protože vztah $Ax = Ay$ vede na rovnici $A(x - y) = 0$, která má pouze triviální řešení $x = y$.

(c) Například $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zobrazení pak není prosté, protože $A(1, 1, 1)^T = (2, 2)^T = A(0, 0, 2)^T$. Zobrazení je ale „na“, protože ve sloupcích matice A je kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^2$, tudíž vygenerujeme jakýkoli vektor v $\mathbb{R}^2$.

(d) Například $A = 0$.

Cv. 13.7 Mějme lineární zobrazení $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:

Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru) takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o.

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$${}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T;\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy

$$u = 1 \cdot (2, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 3, 5)^T - 4 \cdot (7, 1, 4)^T = (-25, 0, -10)^T,$$

který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(-25, 0, -10).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B, my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $u = (-25, 0, -10)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(-25, 0, -10)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je „na"): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva sloupci matice ${}_{\text{kan}}[f]_B$, tedy vektory $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na“.

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.8 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Řešení:

Lineární zobrazení je prosté právě tehdy, když $\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$. Z toho plyne, že je zobrazení prosté právě tehdy, když

$$\mathrm{Ker}(A) = \{o\}.$$

Jinými slovy, musí $0 = \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A)$, neboli $\mathrm{rank}(A) = n$. To znamená, že matice A má lineárně nezávislé sloupce.

Lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když dimenze obrazu odpovídá dimenzi prostoru V. Z toho plyne, že lineární zobrazení je „na“ právě tehdy, když

$$\mathrm{rank}(A) = m.$$

To znamená, že matice A má lineárně nezávislé řádky.

Cv. 13.9 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c,\, a + b,\, a)^T$,

(b) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\, 2b-c,\, a-b+c,\, a+b)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b,\, c,\, a + b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b,\, 2b - c,\, a - b)^T$.

Řešení:

Ve všech případech můžeme vycházet z toho, že lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je prosté právě tehdy, když

$$\mathrm{Ker}(f) = \{o\}$$

a je „na“ právě tehdy, když

$$\dim f(U) = \dim V.$$

(a) Zobrazení není prosté, protože

$$(a + b + c, a + b, a)^T = (0, 0, 0)^T$$

má netriviální řešení, například $a = b = c = 0$ a $d \in \mathbb{R}$.

Zobrazení je „na“, protože dimenze prostoru

$$\{(a+b+c, a+b, c)^T;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

je 3. To lze nahlédnout například tak, že lze vygenerovat vhodnout volbou koeficientů a, b, c vektory $(1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé.

(b) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T = (0,0,0,0,0)^T$$

má množinu řešení $\{(a, -a, -2a)^T;\ a \in \mathbb{R}\}$.

Zobrazení není ani „na“, protože $\mathcal{P}^2$ má dimenzi 3, zatímco $\mathbb{R}^4$ má dimenzi 4. Při lineárním zobrazení se může dimenze zachovat nebo se snížit.

(c) Zobrazení není prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ c,\ a+b)^T = (0,0,0)^T$$

má množinu řešení $\{(a, -a, 0)^T;\ a \in \mathbb{R}\}$.

Zobrazení není ani „na“, protože hodnoty v první a poslední složce jsou si vždy rovny. V obrazu tedy neleží například vektor $(1,0,0)^T$.

(d) Zobrazení je prosté, protože rovnice

$$(a+b,\ 2b-c,\ a-b)^T = (0,0,0)^T$$

má pouze triviální řešení.

Zobrazení je „na“, protože množina obrazů $\{(a+b, c, a-b)^T;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ se dá vyjádřit jako

$$\{a(1,0,1)^T + b(1,0,-1)^T + c(0,1,0)^T;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Vidíme, že obrazem je lineární obal vektorů $(1,0,1)^T$, $(1,0,-1)^T$, $(0,1,0)^T$, které jsou lineárně nezávislé. Dimenze obrazu je proto 3, stejně jako dimenze prostoru $\mathcal{P}^2$.

Isomorfismus

Cv. 13.10 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\ y-z,\ x-y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:

Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na“, tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$$_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0,0,0) = (0,0,0)^T = f(1,1,1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na“. Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0,0,1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Závěr: zobrazení f není isomorfismem.

Cv. 13.11 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\left\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\right\}$,

(f) $\mathbb{R}^4$ a prostor lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:

Dva vektorové prostory jsou isomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi a fungují nad stejným tělesem.

(a) Ano, oba mají dimenzi 4. Není těžké rozmyslet, že isomorfismem je například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a,b,c,d)^T.$$

(b) Ano, oba mají dimenzi 4. Reálný polynom stupně nejvýš tři

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$$

můžeme reprezentovat jako uspořádanou čtveřici $(p_0, p_1, p_2, p_3)^T$. Isomorfismem zde je

$$(p_0, p_1, p_2, p_3)^T \mapsto p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3.$$

(c) Ano, isomorfismem bude například transpozice

$$A \mapsto A^T.$$

(d) Ne, prostory nepracují nad stejným tělesem.

(e) Ano, oba mají dimenzi 2. můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto (a, -a, b, -b)^T.$$

(f) Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(x) = u^T x$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.12 Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus a $x_1, \ldots, x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:
Mějme, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takové, že $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) = o$. Dostáváme

$$o = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x)_i = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right).$$

Pro isomorfismus platí, že $f(x) = o$ právě tehdy, když $x = o$. Proto také $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = o$. Z lineární nezávislosti $x_1, \ldots, x_n$ dostáváme, že $\alpha_i = 0$ pro všechny i, tedy $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.

14. Afinní podprostory

Afinní podprostory, afinní nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:
Označme jako $X = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}$ množinu řešení soustavy. Uvažujme n řešení $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ (tedy $Ax_i = b$ pro $i = 1, \ldots, n$). Máme ukázat, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X, tedy

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy roznásobíme závorku a vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) &= \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \ldots + \alpha_n A x_n = \\ &= \alpha_1 b + \alpha_2 b + \ldots + \alpha_n b = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) b = \\ &= b. \end{aligned}$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T,\ x_1 = (2, 3, 1)^T,\ x_2 = (1, 3, 2)^T,\ x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:
Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T,\ x_1 = (2, 2, 1)^T,\ x_2 = (2, 1, 3)^T \text{ a } \ x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:
Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostoru $\operatorname{span}\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_0,\ x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme

$x_1 - x_0 = (1,2,-1)^T$, $x_2 - x_0 = (1,1,1)^T$, $x_3 - x_0 = (2,3,0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnosti následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots,$ $y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T, 1)^T, \dots, (x_n^T, 1)^T$$

jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T - x_0^T, 0)^T, \dots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé (jsou to vlastně elementární úpravy, když vektory dáme do matice). To je ekvivalentní s tím, že vektory

$$(x_1^T - x_0^T, 0)^T, \dots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé. A to už je zřejmě ekvivalentní s definicí afinní nezávislostí vektorů $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T$,

(b) $M = \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$.

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M, tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1). Jejich rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1,-1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N, tedy jako $(1,-1)^T = \alpha(2,4)^T + (2,3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1, \\ 4\alpha + 3 &= -1, \end{aligned}$$

která nemá řešení. Proto $(1,-1)^T \notin M$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný. Ve skutečnosti přímky M, N jsou rovnoběžné.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T \in M$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do N, tedy se dá vyjádřit jako $c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T = c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T,$$

která se dá zapsat jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned}$$

Pozor, nejedná se o klasicou soustavu rovnic, spíš jen o rovnost s parametry, kterým dodáme určitou interpretaci. Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b, znamená to, že pro libovolný vektor z M daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N. Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d, dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 2 & -1 & \frac{1}{3}(3a+3) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) \end{array}\right).$$

Platí, že $\frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{1}{3}(2a+b+1)$ a $d = \frac{1}{3}(a+2b-1)$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10);\ x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překloplení podle přímky $q = \{(2, y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x ve směru vektoru $(0, -10)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 10)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -10)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,
- $f_3(x) = x + (0, 10)^T$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0,-10)^T)) = f_3(O_1(x + (0,-10)^T)) = \\ &= O_1(x + (0,-10)^T) + (0,10)^T = O_1 x + (0,10)^T + (0,10)^T = \\ &= O_1 x + (0,20)^T. \end{aligned}$$

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3, kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$ (posunutí o $(-2, 0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$ (překloplení podél osy y),

- $g_3(x) = x + (2,0)^T$ (posunutí nazpět o $(2,0)^T$).

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4,0)^T$.

(c) Složení $f \circ g$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4,0)^T) &= O_1(O_2x + (4,0)^T) + (0,20)^T = \\ &= O_1O_2x + O_1(4,0)^T + (0,20)^T = O_1O_2x + (4,0)^T + (0,20)^T = \\ &= O_1O_2x + (4,20)^T, \end{aligned}$$

po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.7 Dokažte:

(a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.

(b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

(c) Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) \coloneqq \{u \in U \;;\; f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U.

Řešení:

(a) Mějme vektorový prostor V a afinní podprostor

$$M = U + a = \{u + a;\ u \in U\},$$

kde $U \Subset V$ a $a \in V$. Dále mějme lineární zobrazení $g\colon V \to W$, vektor $b \in W$ a afinní zobrazení $f\colon V \to W$ definované pomocí

$$f(x) = g(x) + b.$$

Dostáváme,

$$f(M) = f(U + a) = g(U + a) + b = g(U) + g(a) + b.$$

Z toho, že $g(a) + b \in W$ a $g(U) \Subset W$ dostáváme platnost tvrzení.

(b) Mějme dvě afinní zobrazení $f_1\colon U \to V$, $f_2\colon V \to W$ určená pomocí lineárních zobrazení g_1, g_2 a vektorů $b_1 \in V$, $b_2 \in W$ takto:

$$f_1(x) = g_1(x) + b_1, \quad f_2(x) = g_2(x) + b_2.$$

Potom složení můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(x) &= f_2(g_1(x) + b_1) = g_2(g_1(x) + b_1) + b_2 = \\ &= g_2(g_1(x)) + g_2(b_1) + b_2 = (g_2 \circ g_1)(x) + g_2(b_1) + b_2. \end{aligned}$$

Z toho, že $g_2 \circ g_1\colon U \to W$ je lineární zobrazení a $g_2(b_1) + b_2 \in W$ dostáváme platnost tvrzení.

(c) K důkazu využijeme charakterizaci afinních podprostorům, které říká, že M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a skalár α platí, že $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.

Označme $M \coloneqq f^{-1}(v)$. Pokud $x, y \in M$, potom $f(x) = v$ a $f(y) = v$. Z toho dostáváme

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) = \alpha v \ + (1-\alpha)v \ = v.$$

Tudíž $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$ a dostáváme platnost tvrzení.

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Řešení:

Úplným vzorem jsou všechny matice splňující vztah $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = I_2$, po složkách

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ekvivalentně

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ a $a_{21} = -a_{12}$, úplným vzorem je množina matic

$$f^{-1}(I_2) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{smallmatrix}\right);\, x \in \mathbb{R}\}.$$