Zkouška Lineární algebra I,  VZOR

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Jméno:**

---

**1.** Definujte vektorový prostor. **1**
Zformulujte a dokažte Steinitzovu větu o výměně. **7**

---

**2.** Mějme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathcal{P}^2$ a $g : \mathcal{P}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ zadané následovně

$$
\begin{aligned}
f((1,0,0)) &= 2x^2 + x + 2, & g(2x^2 + x) &= (2,-1,8),\\
f((0,1,0)) &= -2x + 1, & g(x^2 + x) &= (3,2,5),\\
f((0,0,1)) &= 3x^2 + 3, & g(-x^2 - x + 1) &= (-1,3,-9).
\end{aligned}
$$

Spočítejte matici složeného zobrazení $g \circ f$ vzhledem ke kanonické bázi. **4**
Je toto zobrazení prosté a je na? **2**

---

**3.** Mějme matice

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix}.
$$

Určete dimenzi průniku jejich řádkových prostorů a rozhodněte, zda lze elementárními řádkovými úpravami převést matici $A$ na $B$. **6**

---

**4.** Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivé:

(a) V každém tělese platí: $0 \neq -1$. **2**

(b) Buďte $U, V, W$ podprostory nějakého vektorového prostoru.
Pak $(U + V) \cap (U + W) \subseteq U + (V \cap W)$. **2**

(c) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ jsou vektory 3 a $\sqrt{3}$ lineárně nezávislé. **2**

(d) Mezi prostory $\mathcal{P}^{15}$ (reálné polynomy stupně nejvýše 15) a $\mathbb{R}^{16}$ nad $\mathbb{R}$ existuje právě jeden isomorfismus. **2**