Domácí úkoly

z

Lineární algebry 1

(ZS 2020/2021)

7. října 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová, Milan Hladík, Pavel Hubáček, Karel Král, Pavel Paták, Veronika Slívová, Jiří Šejnoha

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů]

Obsah

1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Dcv. 1.1 Určete a popište množinu bodů stejně vzdálených od bodů $A = [2, 1, 4]$ a $B = [1, 3, 1]$.

Dcv. 1.2 Uvažujme rovinu procházející body $A = [2, 3, 3]$, $B = [3, 4, 3]$, $C = [1, 3, 2]$. Najděte bod této roviny, který je nejblíže bodu $D = [2, 1, 2]$.

Dcv. 1.3 Určete střed kulové sféry, procházející body $[3, 3, 3]$, $[5, 3, 1]$, $[1, 2, 0]$ a $[2, 0, 1]$.

2. Soustavy lineárních rovnic

Dcv. 2.1 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a+1 & a & 2a & 1 \\ a & 1 & a+1 & 0 \\ 2a & 0 & 2a & 0 \end{array}\right).$$

Dcv. 2.2 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

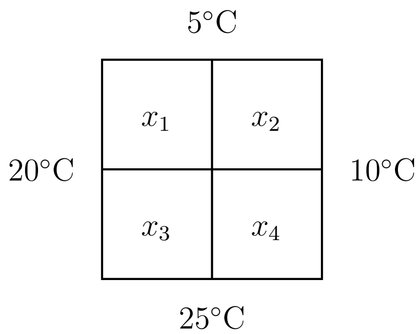
(a) ∞ pro každé b,

(b) 1 pro každé b,

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Dcv. 2.3 Uvažujme neobývaný dům se čtyřmi místnostmi dle obrázku:



Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 25°C, z východu 10°C, ze západu 20°C a ze severu 5°C. Určete teplotu $x_1, \ldots, x_4$ v jednotlivých místnostech pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolích oblastí. (Případnou soustavu řešte Gaussovou eliminací.)

3. Operace s maticemi

Dcv. 3.1 Pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

spočtěte

(a) $4A$,

(b) $A + B$,

(c) AC,

(d) B^T.

Dcv. 3.2 Doplňte chybějící řády matic namísto otazníků tak, aby následující výraz dával smysl (pokud je více možností, zvolte novou proměnnou):

$$E(AB + C) + D = F,$$

$A \in \mathbb{R}^{? \times k}$,

$B \in \mathbb{R}^{? \times ?}$,

$C \in \mathbb{R}^{? \times \ell}$,

$D \in \mathbb{R}^{n \times ?}$,

$E \in \mathbb{R}^{? \times m}$,

$F \in \mathbb{R}^{? \times ?}$

Dcv. 3.3 Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak matice $A + A^T$ je symetrická.

(b) Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak matice $A - A^T$ je symetrická.

4. Regulární a inverzní matice

Dcv. 4.1 Buď $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Pro jaké hodnoty vektoru a je matice $I_n + aa^T$ regulární?

(b) Pro jaké hodnoty vektoru a je matice $I_n - aa^T$ regulární?

Dcv. 4.2 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvaru $A = I_n - B$, kde $b_{ij} = 0$ pro $i \leq j$.

(a) Ukažte, že $B^n = 0$.

(b) Ukažte, že $A^{-1} = I + B + B^2 + \ldots + B^{n-1}$.

(c) Spočítejte podle předchozího vztahu A^{-1} pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dcv. 4.3 Rozhodněte pro která *všechna* čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ je matice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertovatelná a spočítejte jak vypadá její inverze.

5. Grupy a tělesa

Dcv. 5.1 V grupě $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverzním prvkem a^{-1} pro každé $a \in G$:

(a) ukažte, že $e^{-1} = e$,

(b) ukažte, že $(a^{-1})^{-1} = a$,

(c) ukažte, že $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$,

(d) ukažte, že pokud $a \circ b = a$, pak $b = e$.

Dcv. 5.2 (a) Zdůvodněte, proč množina $M = \{e, f, g\}$ spolu s binární operací na M definovanou tabulkou

$\circ$	e	f	g
e	f	e	g
f	e	g	f
g	g	f	e

netvoří grupu.

(b) Nechť $(G, \circ)$ je grupa. Dokažte, že v žádném řádku tabulky pro grupovou operaci $\circ$ se nemůžou prvky G opakovat. Platí obdobné tvrzení i pro sloupce tabulky?

Dcv. 5.3 Invertujte matice

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$,

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nad $\mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{Z}_{11}$.

6. Permutace

Dcv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad q = (1,3,5)(2,4)(6).$$

Spočítejte $q \circ p$, $p \circ q$, p^{11}, p^{-1}, $\operatorname{sgn}(p)$, $\operatorname{sgn}(p^{11})$, $\operatorname{sgn}(p^{-1})$. Tabulkou i přes cykly.

Dcv. 6.2 Určete znaménko permutace

$$(1, 4, 7, \ldots, 3n-1, 2, 5, 8, \ldots, 3n, 3, 6, 9, \ldots, 3n-2)$$

Dcv. 6.3 Ukažte, že pro $n \geq 2$ je počet lichých a sudých permutací v S_n stejný.

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Dcv. 7.1 Rozhodněte, které z následujících množin tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$ (vzhledem k obvyklým operacím):

(a) Všechny matice s racionálními prvky.

(b) Všechny matice $m \times n$ s racionálními prvky.

(c) Reálná čísla.

(d) $\{\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}, q \geq 0\}$.

(e) $\{\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}, q \geq 0\} \cup \{-\sqrt{q} \mid q \in \mathbb{Q}, q \geq 0\}$.

(f) Funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $f(q) = 0$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$.

(g) Funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí $f(q) = q$ pro každé $q \in \mathbb{Q}$.

(h) Všechna zobrazení z dané (libovolné pevné) grupy G do $\mathbb{Q}$.

Dcv. 7.2 Buď X libovolná množina. Dokažte, že pokud definujeme součet dvou podmnožin jako jejich symetrickou diferenci, tak podmnožiny X tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ (s očividnou definicí násobení prvky ze $\mathbb{Z}_2$.).

Dcv. 7.3 Nad $\mathbb{Z}_5$ spočtěte průnik $\operatorname{span}\{(1,4,4)^T, (2,3,4)^T\} \cap \operatorname{span}\{(1,1,4)^T, (2,4,0)^T\}$. Kolik obsahuje vektorů?

8. Lineární závislost a nezávislost

Dcv. 8.1 Nechť má matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lineárně nezávislé sloupce. Ukažte, že soustava $Ax = b$ nemá žádné nebo právě jedno řešení.
(*Pozor, nepředpokládáme, že matice A je čtvercová.*)

Dcv. 8.2 Ukažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} v_i$ jsou lineárně nezávislé.

Dcv. 8.3 Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, a, 1)$, $(1, 1, 1)$ a $(2, 2, a)$ lineárně nezávislé?

9. Báze a dimenze

Dcv. 9.1 Mějme podprostor U prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ určený bází $B = \left\{(3,2,4)^T,\ (6,1,5)^T\right\}$ Rozhodněte, zda vektor $(4,4,2)^T \in \mathbb{Z}_7^3$ náleží do podprostoru U. A pokud ano, tak určete jeho souřadnice vůči bázi B.

Dcv. 9.2 Nalezněte dimenzi podprostoru $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3;\ a + b + c + d = 0\}$ prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

Dcv. 9.3 Nechť $M = \mathbb{R}^{2\times 2}$ je vektorový prostor reálných matic velikosti 2×2. Nechť S je množina reálných symetrických matic velikosti 2×2.

(a) Ukažte, že S je podprostor M.

(b) Nalezněte bázi S (a ukažte o ní, že to je skutečně báze).

(c) Jaká je dimenze S?

10. Maticové prostory

Dcv. 10.1 Zjistěte, zda se rovnají prostory

$$U = \operatorname{span}\left\{(1,1,1)^T, (0,2,-2)^T\right\} \quad \text{a} \quad V = \operatorname{span}\left\{(1,0,2)^T, (2,-1,5)^T, (2,1,3)^T\right\}.$$

Dcv. 10.2 Najděte bázi prostoru

$$W = \operatorname{span}\left\{(1,1,3,2)^T, (2,3,2,3)^T, (1,-1,3,7)^T\right\}$$

obsahující vektor $v = (1,3,-5,0)^T$.

Dcv. 10.3 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{R}(A) \cap \operatorname{Ker}(A) = \{o\}$,

(b) $\mathcal{R}(A+B) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$.

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Dcv. 11.1 Rozhodněte a dokažte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem

$$f(x, y) = (2x + y,\, x - 2y)$$

je/není lineárním zobrazení. Pokud lineárním zobrazením je, vytvořte jeho matici vůči kanonickým bázím.

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Dcv. 12.1 Mějme vektorové prostory U s bází B_U a V s bází B_V nad tělesem $\mathbb{R}$. Dále máme maticemi zadané lineární zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$, ${}_{B_U}[id]_{B_V}$, ${}_{B_U}[f]_{B_U}$.

Pomocí skládání zadaných zobrazení vytvořte následující lineární zobrazení:

(a) ${}_{B_V}[f]_{B_V}$

(b) ${}_{B_U}[f]_{B_V}$

(c) ${}_{B_U}[id]_{B_U}$

Dcv. 12.2 Mějme vektorové prostory U, V, W nad tělesem $\mathbb{R}$. Mějme lineární zobrazení $f: U \to V$ a $g: V \to W$ daná maticemi ${}_{B_W}[g]_{B_V} = G$ a ${}_{B_V}[f]_{B_U} = F$.

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze vektorových prostorů jsou:

$$\begin{aligned} B_U &= \{-x^2 + 3,\ 2x^2 - 2x + 2,\ x - 3\}, \\ B_V &= \{(-2, 1, 3)^T,\ (1, -2, 1)^T,\ (1, 0, -1)^T\}, \\ B_W &= \{(0, 2, -1)^T,\ (2, -1, 1)^T,\ (-2, 1, -2)^T\}. \end{aligned}$$

(a) Určete bázi a dimenzi jádra matice složeného zobrazení $\mathrm{Ker}(g \circ f)$.

(b) Určete bázi a dimenzi obrazu složeného zobrazení $(g \circ f)(U)$.

(c) Rozhodněte, zda složené zobrazení $g \circ f$ je prosté.

(d) Rozhodněte, zda složené zobrazení $g \circ f$ je „na“.

13. Obraz, jádro, isomorfismus

Dcv. 13.1 Určete jádro (tedy bázi jádra zobrazení f, kde jsou jednotlivé vektory vyjádřené vůči kanonické bázi) lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ daného

$$f\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 3 & 5\\ 3 & 3 & 5\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dcv. 13.2 Rozhodněte, která tvrzení platí a zdůvodněte (tedy dokažte nebo vyvraťte):

(a) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\forall u \in \mathrm{Ker}(A) \cup \mathrm{Ker}(B)\colon u \in \mathrm{Ker}(A+B)$

(b) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\forall u \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)\colon u \in \mathrm{Ker}(AB)$

(c) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\forall u \in \mathrm{Ker}(A) \cup \mathrm{Ker}(B)\colon u \in \mathrm{Ker}(AB)$

(d) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\forall u \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)\colon u \in \mathrm{Ker}(AB)$

(e) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\forall u \in \mathcal{S}(B)\colon u \in \mathcal{R}(A)$

(f) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak $\exists u \in \mathcal{S}(B)\colon u \in \mathcal{R}(A)$

(g) $A \in \mathbb{R}^{n\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times m}$ a nechť $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$, pak AB je nulová matice

Dcv. 13.3 Najděte isomorfismus mezi $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid (1,2,3,4)v = 0\}$ a $\left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = A\right\}$.

14. Afinní podprostory

Dcv. 14.1 Mějme afinní podprostor $\mathrm{span}\{(2,3,1)^T, (-1,2,0)^T\} + (1,0,1)^T$. Rozhodněte, zda do podprostoru náleží

(a) $(6,0,2)^T$,

(b) $(6,0,3)^T$.

Dcv. 14.2 Rozhodněte, zda jsou $(2,2,2)^T, (4,5,3)^T, (4,4,7)^T, (3,3,-1)^T$ afinně nezávislé.

Dcv. 14.3 Rozhodněte, v jakém vztahu jsou afinní podprostory M, N $(\subseteq, \subseteq, =)$, když

- $M = \mathrm{span}\{(1,1,-1)^T, (2,3,0)^T\} + (2,-3,1)^T$,
- N je afinní obal $\{(3,-3,-2)^T, (4,1,3)^T, (2,-7,-7)^T\}$.

Dcv. 14.4 Ukažte, že průnik afinních podprostorů je zase afinní podprostor, nebo prázdná množina.