

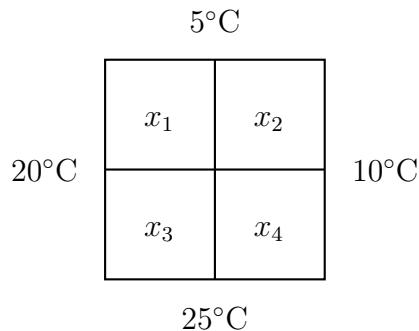
# Domácí úkoly z Lineární algebry I

(17. prosince 2020)

**Úkol 1.** Uvažujme rovinu procházející body  $A = [2, 3, 3]$ ,  $B = [3, 4, 3]$ ,  $C = [1, 3, 2]$ . Najděte bod této roviny, který je nejbližší bodu  $D = [2, 1, 2]$ .

6

**Úkol 2.** Uvažujme neobývaný dům se čtyřmi místnostmi dle obrázku:



Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 25°C, z východu 10°C, ze západu 20°C a ze severu 5°C. Určete teplotu  $x_1, \dots, x_4$  v jednotlivých místnostech pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolích oblastí. (Případnou soustavu řešte Gaussovou eliminací.)

6

**Úkol 3.** Buď  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Navrhněte co nejefektivnější způsob výpočtu  $A^k b$ .

Konkrétně pak určete kolik operací (počítejme jen součiny čísel) musíme vykonat, když  $k = 256$  a  $n = 30$ .

6

Speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 200 000.

Extra speciální odměna tomu, komu se podaří počet operací srazit pod 100 000.

**Úkol 4.** Uvažujme následující způsob šifrování textových zpráv. Každému písmenu A až Z přiřadíme postupně čísla 1 až 26

A → 1	H → 8	O → 15	V → 22
B → 2	I → 9	P → 16	W → 23
C → 3	J → 10	Q → 17	X → 24
D → 4	K → 11	R → 18	Y → 25
E → 5	L → 12	S → 19	Z → 26
F → 6	M → 13	T → 20	
G → 7	N → 14	U → 21	

Tím pádem místo vstupního textu máme posloupnost čísel. Nyní rozdělíme posloupnost do  $n$ -tic. Každá  $n$ -tice odpovídá vektoru  $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Šifrování probíhá potom tak, že vektor přenásobíme předem danou maticí  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Tedy každá  $n$ -tice  $v$  se zašifruje na  $n$ -tici  $Av$ . Zašifrovanou posloupnost čísel pošleme a příjemce dešifruje zprávu jednoduše tak, že rozdělí posloupnost čísel do  $n$ -tic a každou  $n$ -tici  $w$  vynásobí maticí  $A^{-1}$  a dostane  $A^{-1}w$ . Z tabulky pak přeloží čísla zpět na znaky.

Konkrétně, dešifrujte posloupnost čísel

15, 29, 49, 80, 9, 14, 15, 29, 30, 55, 15, 29, 38, 67, 53, 85,

za předpokladu, že  $n = 2$  a podařilo se vám odhalit, že slovo „PIVO“ se zašifruje jako 34, 59, 52, 89. 6

**Úkol 5.** Najděte těleso, skládající se ze 4 prvků „jablko“, „hruška“, „švestka“ a „třešeň“. 6  
(Jak vypadají příslušné operace uveďte třeba v tabulce.)

**Úkol 6.** Určete počet inverzí a znaménko permutace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & \dots & 3n \\ 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & \dots & 3n & 1 & 4 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}.$$

(V druhém řádku se tedy čísla zvyšují postupně o 3 v každém úseku, kde jsou tři tečky.) 6

**Úkol 7.** Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností  $\mathbb{R}^\infty$ :

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami, 2

(např. posloupnost  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  obsahuje nekonečně mnoho nul, ale posloupnost  $(0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$  nikoli)

(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulovými prvky, 2

(např. posloupnost  $(0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$  obsahuje konečně mnoho nenul, ale posloupnost  $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$  nikoli)

(c) monotónní posloupnosti (tedy neklesající nebo nerostoucí). 2

**Úkol 8.** Rozhodněte, zda  $U = V$  pro

$$U = \text{span}\{(1, 2, 0)^T, (0, 1, -1)^T\}, \quad V = \text{span}\{(2, 1, 3)^T, (-1, 0, -2)^T\}. \quad 6$$

**Úkol 9.** Buď  $\mathbb{T}$  těleso velikosti  $n$ . Označme  $V$  množinu všech zobrazení z  $\{1, \dots, m\}$  do  $\mathbb{T}$ .

(A) Ukažte stručně, že  $V$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{T}$  se standardními operacemi pro zobrazení, tj. pro  $\alpha \in \mathbb{T}$  a  $f, g : \{1, \dots, m\} \mapsto \mathbb{T}$  definujeme násobek zobrazení  $(\alpha f)$  a součet zobrazení  $(f + g)$  jako

$$\begin{aligned} (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \\ (f + g)(x) &= f(x) + g(x). \end{aligned} \quad 3$$

(B) Najděte bázi  $V$  a určete  $\dim(V)$ . 3

**Úkol 10.** V nějakém vhodném programu (např. Matlab, Octave, ...) vygenerujte dvě náhodné matice  $A, B$  rozměrů  $3 \times 6$  s prvky v množině  $\{0, 1\}$ . Najděte bázi prostorů  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{S}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$ , a určete dimenzi prostorů  $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$  a  $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(B)$ . Pomocné základní výpočty (hodnost, RREF tvar, atp.) opět můžete provádět na počítači, ale odevzdejte i mezivýsledky a popište postup. 6

**Úkol 11.** Buď  $f: \mathbb{R}^3 \mapsto P^2$  lineární zobrazení definované takto:

$$f(1, 0, 1) = x^2 + x + 1, \quad f(0, 1, 1) = -x^2 + x + 1, \quad f(0, 0, 1) = x.$$

Určete matici zobrazení  $f$  vůči bázím  $B_1$  a  $B_2$ , jestliže  $B_1$  se skládá z vektorů  $(1, -1, -1)^T$ ,  $(0, 0, 1)^T$ ,  $(1, 1, 1)^T$  a báze  $B_2$  se skládá z vektorů  $x+1$ ,  $-x^2-x$ ,  $x$ . **6**

**Úkol 12.** Vyplňte anketu na <https://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA/anketa-zs2020.txt> (je to obyčejný textový soubor). Nebojte se být upřímní a psaví! **6**