Milan Hladík

Vzorové Cvičení

z

Lineární Algebry

21. října 2021

Tento text slouží jako podkladový materiál ke cvičením pro přednášky Lineární algebra I a II pro první ročník studia informatiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Věřím však, že může dobře posloužit i studentům (a nejen jim) z jiných škol.

Text je rozložen do tématických sekcí a každá z nich se skládá ze dvou částí. První část je demonstrativní a je v ní uvedeno vždy několik ilustrativních ukázek jak pracovat s pojmy a metodami předvedenými na přednášce. Slouží především při samostatném studiu. Na začátku také bývá občas v rámečku připomenuta nejdůležitější věta, definice či metoda. Druhá část obsahuje příklady na procvičení. Příkladů je dost aby pokryly cvičení a zbylo ještě na případné procvičení doma. Hvězdička označuje náročnější úlohu. Příklady jsou typové a každého typu tam je většinou jen jeden či několik málo exemplářů. Proto tento text neslouží jako klasická sbírka úloh.

Většina příkladů není originálních, a ani o to nebylo usilováno. Děkuji všem, kteří přispěli pěknou úlohou, zejména Jaroslavu Horáčkovi za zpracování ukázek pro první čtyři kapitoly.

Připomínky, chyby a zajímavé úlohy prosím zasílejte na adresu hladik@kam.mff.cuni.cz.

Obsah

Část I

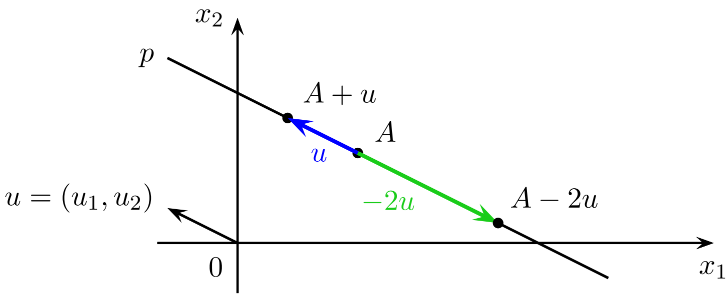
Od soustav rovnic, přes matice a vektorové prostory k lineárním zobrazením

1 Analytická geometrie

Ukázka 1.1 (Popis přímky v rovině)**.** *Parametrický popis* přímky p v rovině $\mathbb{R}^2$ je

$$p : [x_1, x_2] = A + t \cdot u, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $A = [a_1, a_2]$ je jeden pevný bod přímky, $u = (u_1, u_2)$ je směrový vektor a t je parametr reprezentující libovolné reálné číslo. S tím, že jak násobíme parametrem t vektor u, tento vektor se prodlužuje jedním či druhým směrem a dostaneme tak postupně všechny body $[x_1, x_2]$ na přímce p.



Přímku můžeme v rovině $\mathbb{R}^2$ definovat i s využitím její normály $r = (r_1, r_2)$, což je vektor kolmý na přímku. Zatím berme jako fakt, že dva vektory $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ jsou navzájem kolmé, pokud je jejich skalární součin $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$ roven 0. Mějme zadaný bod $A = [a_1, a_2]$ a normálový vektor $r = (r_1, r_2)$. Od libovolného bodu $X = [x_1, x_2]$, který má ležet na přímce chceme, aby vektor $u = X - A$ byl kolmý na vektor r. Pomocí skalárního součinu zapsáno

$$(X - A) \cdot r = 0.$$

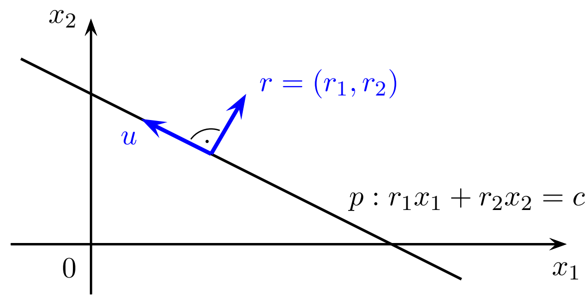
Po rozepsání skalárního součinu dostaneme

$$(x_1 - a_1) r_1 + (x_2 - a_2) r_2 = 0.$$

Po roznásobení dostaneme

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 = c, \text{ kde } c = a_1 r_1 + a_2 r_2.$$

Dostáváme takzvanou *obecnou rovnici* přímky.



Odtud už se můžeme jednoduchými úpravami přesunout k *směrnicové rovnici* ve tvaru $x_2 = p x_1 + q$, za předpokladu $r_2 \neq 0$. Zatímco z parametrické rovnice rovnou vidíme směrový vektor, v obecné rovnici je přímo vidět normála $r = (r_1, r_2)$. Ve směrnicové rovnici je zase vidět, jak název napovídá, směrnice přímky. Platí $p = \tan \alpha$, kde α je úhel, který přímka svírá s osou x_1.

Výše zmíněný způsob vlastně i ukazuje, proč obecnou rovnici přímky můžeme napsat jen pokud se pohybujeme v rovině $\mathbb{R}^2$. Kdybychom byli v prostoru $\mathbb{R}^3$, tak na normálu r bude kolmá nejen přímka, kterou chceme popsat, ale i celá rovina tvořená přímkami kolmými na r. $\square$

Ukázka 1.2 (Jednoduchý převod popisu přímky)**.** Toto je konstrukce, která se může občas hodit. Určete rovnici přímky (v rovině $\mathbb{R}^2$), která prochází body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, kde předpokládáme $a_1 \neq b_1$. Určete ji bez jakéhokoli počítání směrového vektoru. Idea je jednoduchá, nejprve si uvědomíme, že rovnice přímky obsahuje proměnné x_1, x_2 pouze v první mocnině a současně koeficienty u x_1, x_2 nejsou oba zároveň nulové. Budeme vytvářet rovnici přímky tak, aby pokud za x_1 dosadíme a_1, dostaneme výsledek $x_2 = a_2$ a podobně pro $x_1 = b_1$ dostaneme $x_2 = b_2$. Naše rovnice by pro začátek mohla vypadat takto

$$x_2 = a_2 \cdot \ldots + b_2 \cdot \ldots$$

Nyní přidáme k a_2, b_2 další prvky tak, aby když do rovnice dosadíme a_1, člen s b_2 bude nulový a vypadne. Stejně tak pro b_1. To se udělá jednoduše

$$x_2 = a_2 \cdot (x_1 - b_1) + b_2 \cdot (x_1 - a_1).$$

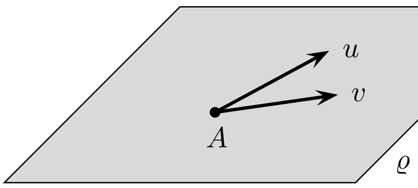
Nyní vidíme, že po dosazení a_1 nám sice vypadne druhý člen, ale na pravé straně ještě pořád není a_2, je tam něco navíc. To vyřešíme tak, že členy ještě vhodně podělíme jiným členem. Snadno můžeme dosazením ověřit, že takto je to už v pořádku

$$x_2 = a_2 \cdot \frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1} + b_2 \cdot \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}. \qquad \square$$

Ukázka 1.3 (Dostáváme se k rovině)**.** Je jasné, že bod a směrový vektor pro určení roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$ nestačí. Musíme mít směrové vektory dva. Rovinu ϱ tedy definujeme pomocí dvou různých (tzv. lineárně nezávislých, tedy jeden není násobek druhého) směrových vektorů $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ a jednoho bodu A a dvou reálných parametrů s, t takto

$$\varrho : [x, y, z] = A + t \cdot u + s \cdot v.$$

Obrázek schematicky znázorňuje situaci:



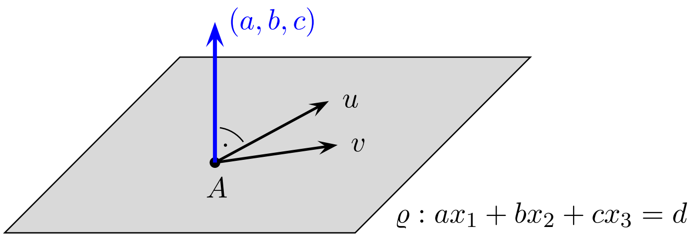
Rovinu můžeme zadat i pomocí rovnice

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d,$$

kde (a, b, c) je normálový vektor a aspoň jedna jeho složka je nenulová. Normálový vektor je kolmý na oba směrové vektory, to jest

$$(a, b, c) \cdot (u_1, u_2, u_3) = au_1 + bu_2 + cu_3 = 0,$$
$$(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3) = av_1 + bv_2 + cv_3 = 0.$$

Obrázek opět ilustruje situaci:



$\square$

Ukázka 1.4 (Počítáme průsečík)**.** V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete průsečík roviny, zadané rovnicí

$$\varrho : 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 1 = 0$$

a přímky, zadané parametricky

$$p : [x_1, x_2, x_3] = [0, 3, -1] + t \cdot (1, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Hledáme bod, který splňuje obě rovnice. Dosadíme souřadnice bodu s parametrem t z popisu přímky, tj.

$$x_1 = t, \quad x_2 = 3 - t, \quad x_3 = -1 + 2t,$$

do rovnice roviny a dostaneme

$$2 \cdot (t) + 4 \cdot (3 - t) - 3 \cdot (-1 + 2t) + 1 = 0.$$

Po vyřešení rovnice dostáváme $t = 2$. Průsečík P dostaneme tak, že zpětně parametr dosadíme do parametrické rovnice přímky.

$$P = [0, 3, -1] + 2 \cdot (1, -1, 2) = [2, 1, 3].$$

□

Cvičení

Cv. 1.1 Jaké jsou možné popisy přímky v rovině?

Cv. 1.2 Převeďte rovnicový popis na parametrický a naopak.

Cv. 1.3 Zjistěte, zda bod $[3, 1]$ leží na přímce p definované parametricky $p : [x_1, x_2] = [2, 3] + t(-1, 2)$.

Cv. 1.4 Jaké jsou možné popisy roviny v prostoru?

Cv. 1.5 Jaké jsou možné popisy přímky v prostoru?

Cv. 1.6 Najděte rovnicové vyjádření roviny s bodem $[1, 1, 1]$ a směrnicemi $(1, 2, 3), (2, 0, 1)$.

Cv. 1.7 Najděte parametrické vyjádření roviny $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$.

Cv. 1.8 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi: $-x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $-x_1 + 2x_2 = 3$.

Cv. 1.9 Najděte dvě rovnice popisující přímku $[2, 1, 1] + t(1, 2, 0)$.

Cv. 1.10 Zjistěte, zda bod $D = [-1, -1, 3]$ leží v rovině dané body $A = [1, 2, -1]$, $B = [3, 1, 1]$, $C = [-1, 1, 0]$.

Cv. 1.11 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametrickými rovnicemi nebo obecnými rovnicemi.

Cv. 1.12 Určete vzájemnou polohu tří přímek zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 0, 1],\ (1, 2, 3), \quad q : [0, 1, 2],\ (0, 1, 1), \quad r : [1, 0, 1],\ (0, 2, 2).$$

Cv. 1.13 Určete množinu bodů stejně vzdálených od bodů $[2, 1, 2]$ a $[0, 1, 0]$.

Cv. 1.14 Určete vzdálenost mezi bodem $A = [1, 2, 3]$ a rovinou $\varrho : 2x + y + 2z - 6 = 0$.

Cv. 1.15 Na přímce určené rovnicemi $x + y + 2z = 1$, $3x + 4y - z = 29$ najděte bod Q, který je stejně vzdálený od bodu $A = [3, 4, 11]$ jako od bodu $B = [-5, -2, -13]$.

2 Soustavy lineárních rovnic

Ukázka 2.1 (Elementární operace)**.** Uvažujme elementární řádkové operace:

1. vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$,
2. přičtení j-tého řádku k i-tému,
3. přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, $i \neq j$,
4. výměna i-tého a j-tého řádku.

Poslední dvě operace se dají vyjádřit pomocí prvních dvou. Vyjádřete je.

Řešení: Třetí operaci jednoduše uděláme následovně, pokud je $\alpha = 0$ logicky neděláme nic. Pokud je nenulové, j-tý řádek vynásobíme α, přičteme ho k i-tému a pak j-tý řádek zpátky vydělíme α.

Čtvrtou operaci vyjádříme následovně:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{j\text{-tý přičteme} \\ \text{k } i\text{-tému}}} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_i + u_j \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{i\text{-tý odečteme} \\ \text{od } j\text{-tého}}} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_i + u_j \\ \vdots \\ -u_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{j\text{-tý přičteme} \\ \text{k } i\text{-tému}}} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ -u_i \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{j\text{-tý} \\ \text{vynásob } -1}} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Ukázka 2.2. Dokažte formálně, že elementární řádkové úpravy nemění množinu řešení soustavy.

Řešení: Nechť $(A \mid b)$ o rozměrech $m \times n$ je původní soustava, a nechť $(A^* \mid b^*)$ je soustava s provedenou elementární řádkovou operací. Stačí ukázat pro první dvě elementární řádkové úpravy, že když nějaký vektor x řeší $(A \mid b)$, tak řeší i $(A^* \mid b^*)$ a naopak. Jinými slovy, že množina řešení obou soustav je stejná. A tedy elementární řádkové úpravy zachovávají množinu řešení. Je nutno podotknout, že zatím jsme si neřekli, co vlastně může všechno být množina řešení soustavy rovnic, i bez takového vyslovení bude následující důkaz korektní. Uvědomme si dále, že jediný řádek, který je v obou soustavách rozdílný je řádek i-tý. Proto zkoumáme jen onu rovnici reprezentovanou tímto řádkem.

1. „$\Rightarrow$“ Nechť x je řešení $(A \mid b)$. Zkusíme, zda x bude vyhovovat i pro i-tý řádek soustavy $(A^* \mid b^*)$:

   $$A^*_{i1}x_1 + \ldots + A^*_{in}x_n = \alpha A_{i1}x_1 + \ldots + \alpha A_{in}x_n = \alpha(A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n) = \alpha(b_i) = b^*_i.$$

   První rovnost dostaneme z definice operace násobení řádku skalárem, druhou z distributivity násobení reálných čísel, třetí z toho, že víme, že x řeší soustavu $(A \mid b)$, a tedy i její i-tý řádek, a poslední rovnost máme opět z definice násobení řádku skalárem.

   „$\Leftarrow$“ Vektor x nechť řeší $(A^* \mid b^*)$. Zkusíme, zda řeší i $(A \mid b)$.

   $$A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n = \frac{\alpha}{\alpha}(A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n) = \frac{A^*_{i1}x_1 + \ldots + A^*_{in}x_n}{\alpha} = \frac{b^*_i}{\alpha} = \frac{\alpha b_i}{\alpha} = b_i.$$

   První rovnost jsme dostali jedním pěkným trikem, druhou z definice násobení řádku skalárem, třetí z toho, že x řeší $(A^* \mid b^*)$ a předposlední opět z definice násobení řádku skalárem.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť x je řešení $(A \mid b)$. Pak

   $$\begin{aligned} A^*_{i1}x_1 + \ldots + A^*_{in}x_n &= (A_{i1} + A_{j1})x_1 + \ldots + (A_{in} + A_{jn})x_n \\ &= (A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n) + (A_{j1}x_1 + \ldots + A_{jn}x_n) = b_i + b_j = b^*_i. \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Vektor x nechť řeší $(A^* \mid b^*)$. Pak

$$\begin{aligned} A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n &= (A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n) + (A_{j1}x_1 + \ldots + A_{jn}x_n) - (A_{j1}x_1 + \ldots + A_{jn}x_n) \\ &= (A^*_{i1}x_1 + \ldots + A^*_{in}x_n) - b_j = b^*_i - b_j = b_i + b_j - b_j = b_i. \end{aligned}$$

U důkazů je potřeba si uvědomit, co už znám (už vím, že x mi něco řeší), a ve správný čas to použít. $\square$

Ukázka 2.3 (Gaussova eliminace)**.** Vyřešte Gaussovou eliminací soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1, \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7. \end{array}$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici soustavy a aplikujeme postupně elementární řádkové úpravy.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \overset{II.\,-\,3\times I.}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \overset{III.\,+\,I.}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{III.\,+\,3\times II.}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí směrem od posledního řádku k prvnímu dostáváme z posledního rovnici $x_3 = 1$. Z druhé rovnice $-x_2 - 2x_3 = -4$ dostáváme $x_2 = 2$ a konečně z první rovnice $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ dostaneme $x = -1$. Řešení je tedy pouze jedno a to vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$. $\square$

Ukázka 2.4 (Gaussova–Jordanova eliminace)**.** Vyřešte Gaussovou–Jordanovou eliminací soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 1x_2 & + & 2x_3 & = & 3, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 6x_3 & = & 2. \end{array}$$

Řešení: Postupujeme podobně jako u Gaussovy eliminace, ale tentokrát chceme matici soustavy převést do *redukovaného* odstupňovaného tvaru, ve kterém je každý pivot rovný 1 a všechny ostatní prvky ve sloupci s pivotem jsou 0. Zapíšeme rozšířenou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \end{array}\right),$$

na kterou postupně aplikujeme elementární řádkové úpravy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{I.} \leftrightarrow \text{II.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{II.}-2\cdot\text{I.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & -9 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III.}-5\cdot\text{I.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{3}\cdot\text{II.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{I.}+2\cdot\text{II.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III.}-\text{II.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{I.}-\text{III.}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Z redukovaného odstupňovaného tvaru matice již snadno vyčteme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$. $\square$

Ukázka 2.5 (Homogenní soustava)**.** Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0. \end{array}$$

Řešení: Napíšeme rozšířenou matici soustavy a eliminujeme postupně pomocí elementárních řádkových úprav.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{II.\,-\,2\times I.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{III.\,-\,3\times I.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{III.\,-\,\frac{5}{3}\times II.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Je vidět, že matice má menší hodnost než 4, a tedy budeme mít volné proměnné, které budou fungovat jako parametry. Jsou to nebázicke proměnné x_2 a x_4. Budeme s nimi provádět normálně klasicky zpětnou substituci a pomocí nich parametricky vyjádříme všechna možná řešení. Z druhé rovnice $-3x_3 - 3x_4 = 0$ dostaneme $x_3 = -x_4$. A z první rovnice $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$ dostaneme $x_1 = -2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -2x_2 - x_4$. Řešení tedy je ve tvaru

$$\begin{aligned} x_4 &= x_4, \\ x_3 &= -\,x_4, \\ x_2 &= x_2, \\ x_1 &= -\,2x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Jiný užitečný zápis řešení je v následující podobě. Když se podíváme na maticové operace po řádcích dostaneme výše zmíněný zápis.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \cdot \underbrace{(-2, 1, 0, 0)}_{h_1} + x_4 \cdot \underbrace{(-1, 0, -1, 1)}_{h_2}, \quad \text{kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že všechna řešení této soustavy jsme schopni popsat jako nějakou kombinací dvou vektorů h_1 a h_2. Dále je dobré si povšimnout, že h_1 i h_2 jsou také řešeními soustavy, neboť stačí vždy u jednoho parametru zvolit 0 a u druhého 1.

Na pravé straně zadané soustavy jsou samé nuly. Taková soustava se nazývá *homogenní.* Na druhou stranu máme i soustavu *nehomogenní*, ta na pravé straně obsahuje alespoň jednu nenulu. Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, jedná se o nulový vektor, tzv. *triviální řešení.* □

Ukázka 2.6 (Soustava se nekonečně řešeními)**.** Vezmeme si nyní stejnou soustavu jako v ukázce 2.5, akorát nenulovou pravou stranou.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 5, \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 7. \end{array}$$

A aplikujeme na ni tytéž eliminační kroky jako na soustavu dřívější.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \overset{II.\,-\,2\times I.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right) \overset{III.\,-\,3\times I.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{III.\,-\,\frac{5}{3}\times II.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení

$$\begin{aligned} x_4 &= x_4, \\ x_3 &= 1 - x_4, \\ x_2 &= x_2, \\ x_1 &= 2 - 2x_2 - x_4. \end{aligned}$$

Po rozepsání do druhého tvaru má řešení $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tvar

$$x = \underbrace{(2,0,1,0)}_{u} + x_2 \cdot \underbrace{(-2,1,0,0)}_{h_1} + x_4 \cdot \underbrace{(-1,0,-1,1)}_{h_2}, \quad \text{kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Dostali jsme zde stejné vektory h_1, h_2. Je vidět, že celé řešení nehomogenní soustavy je posunuté oproti řešení příslušné homogenní soustavy o nějaký nenulový vektor u. Tudíž všechna řešení nehomogenní soustavy lze vyjádřit jako jedno konkrétní řešení nehomogenní soustavy plus množina všech řešení příslušné homogenní soustavy. □

Ukázka 2.7 (Soustava s parametrem)**.** Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & a+1 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2a & 2 \end{array}\right).$$

Řešení: Opět využijeme Gaussovu nebo Gaussovu–Jordanovu eliminaci a pomocí řádkových úprav převedeme matici soustavy do odstupňovaného tvaru. Řešení soustavy pak vyjádříme v závislosti na hodnotě parametru a. (Pozor na dělení/násobení řádku nulou!)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & a+1 & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2a & 2 \end{array}\right) \overset{\text{I.}\leftrightarrow\text{III.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2a & 2 \\ 2 & 2-a & 2 & 2 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{II.}-\text{I.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 0 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2 \end{array}\right) \overset{2\cdot\text{III.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 0 \\ 2a+2 & 2 & 2a+2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III.}-(a+1)\cdot\text{I.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 0 \\ 0 & 1-a & -2a^2+2 & 2-2a \end{array}\right) \overset{\text{III.}-\text{II.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 1-a & 2-2a & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2+2a & 2-2a \end{array}\right)$$

Z třetího řádku upravené matice dostaneme $a(2-2a)x_3 = 2-2a$, tedy $x_3 = \frac{1}{a}$ pro $a \notin \{0,1\}$. Dále zpětnou substitucí získáme hodnoty $x_2 = -\frac{2}{a}$ a $x_1 = \frac{1}{a}$.

Pro $a = 0$ má třetí rovnice tvar $0x_3 = 2$, soustava tedy nemá řešení.

Pro $a = 1$ dostaneme odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Množinu řešení tudíž popisuje rovnice $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$, ze které můžeme vyjádřit proměnnou $x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3$ pomocí volných proměnných x_2, x_3. Všechna řešení tedy lze zapsat jako

$$(1 - \tfrac{1}{2}x_2 - x_3, x_2, x_3) = (1,0,0) + x_2 \cdot (-\tfrac{1}{2}, 1, 0) + x_3 \cdot (-1, 0, 1)$$

pro $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Řešením dané soustavy lineárních rovnic v závislosti na parametru a je

$$\begin{cases} (\frac{1}{a}, -\frac{2}{a}, \frac{1}{a}) & \text{pro } a \notin \{0,1\}, \\ (1,0,0) + x_2 \cdot (-\frac{1}{2}, 1, 0) + x_3 \cdot (-1,0,1),\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} & \text{pro } a = 1, \\ \emptyset & \text{pro } a = 0. \end{cases}$$

□

Ukázka 2.8 (Počítání s omezenou přesností)**.** Jak vypadá floating point number? Odpovídá tvaru

$$\pm d_1, d_2 d_3 \dots d_t \times \beta^{\epsilon}$$

Písmeno t značí přesnost, neboli počet číslic reprezentace, a písmeno β představuje základ, ve kterém počítáme – na papíře to bývá 10, na počítači 2. Číslo reprezentujeme tak, že $d_1 \neq 0$. Písmeno ϵ je exponent. Platí $0 \leq d_i \leq \beta - 1$ pro všechna $i > 1$. Označme $fl(v)$ počítačovou reprezentaci čísla $v \in \mathbb{R}$, v našem případě uvažujeme zaokrouhlení k nejbližšímu reprezentovatelnému číslu.

Příklad. Soustava

$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1, \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

má přesné řešení $x_1 = \frac{1}{1.0001}$, $x_2 = \frac{1.0002}{1.0001}$. V aritmetice s přesností na 3 číslice (tj., $t = 3$) však Gaussova eliminace upraví matici na tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -10^{-4} & 1 & 1 \\ 0 & 10^4 & 10^4 \end{array}\right),$$

protože

$$fl(1 + 10^4) = fl(1.0001 \times 10^4) = 1.00 \times 10^4 = 10^4,$$

$$fl(2 + 10^4) = fl(1.0002 \times 10^4) = 1.00 \times 10^4 = 10^4.$$

Zpětnou substitucí dostaneme řešení $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, což je hodně daleko od „správného“ řešení.

Co s tím? Pomoci nám může někdy tzv. částečná pivotizace, kdy v pivotním sloupečku hledám koeficient s maximální absolutní hodnotou. Tímto postupem dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -10^{-4} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

protože

$$fl(1 + 10^{-4}) = fl(1.0001 \times 10^0) = 1.00 \times 10^0 = 1,$$

$$fl(1 + 2 \times 10^{-4}) = fl(1.0002 \times 10^0) = 1.00 \times 10^0 = 1.$$

To nám dává řešení $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, což už je bližší správnému řešení. □

Cvičení

Motivace k soustavám rovnic

Cv. 2.1 Diskutujte geometrickou interpretaci řešení soustav rovnic jako hledání průniku nadrovin.

Cv. 2.2 Co je řešením soustavy 3×3?

Cv. 2.3 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[0, 3]$, $[1, 2]$, $[3, 6]$.

Podotázka: kdy při prokládání bodů polynomem existuje řešení a je jednoznačné?

Cv. 2.4 Najděte hyperbolu tvaru $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, procházející body $[1, 4]$, $[2, 3]$, $[4, 2]$.

Cv. 2.5 Určete střed kružnice, procházející body $[0, 1]$, $[-1, 1]$ a $[2, 0]$.

Cv. 2.6 Určete střed kulové sféry, procházející body $[3, 3, 3]$, $[5, 3, 1]$, $[1, 2, 0]$ a $[2, 0, 1]$.

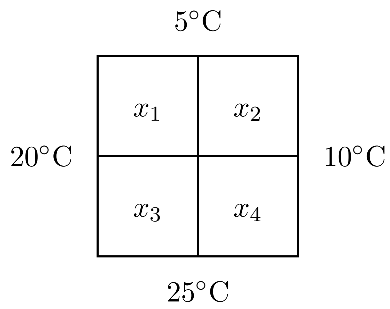
Cv. 2.7 Biologický laborant chová 100 myší ve čtyřech komorách spojených následujícími průchody: $1-2$, $2-3$, $2-4$ a $3-4$. Empiricky vypozoroval, že v každé komoře zůstane 40% myší a zbytek se rovnoměrně rozptýlí do sousedních komor. Pokud na konci pokusu v komorách bylo $12, 25, 26$ a 37 myší, kolik jich bylo na začátku?

Cv. 2.8 Ethan se na vzduchu spaluje na vodu a oxid uhličitý, což se vyjadřuje chemickým vzorcem

$$C_2H_6 + O_2 \;\to\; CO_2 + H_2O.$$

Striktně vzato, toto není chemická rovnice, protože počet jednotlivých atomů vodíku, kyslíku a uhlíku se na levé straně liší od těch napravo. Doplňte počty molekul, aby rovnost platila.

Cv. 2.9 Uvažujme neobývaný dům se čtyřmi místnostmi dle obrázku:



Z jihu je dům ohříván průměrnou teplotou 25°C, z východu 10°C, ze západu 20°C a ze severu 5°C. Určete teplotu $x_1, \ldots, x_4$ v jednotlivých místnostech pokud známe (zjednodušenou) fyzikální poučku, že teplota dané oblasti je průměrem teplot okolích oblastí.

Gaussova a Gaussova–Jordanova eliminace

Cv. 2.10 Definujte pojem (redukovaný) odstupňovaný tvar matice.

Cv. 2.11 Vyřešte Gaussovou a Gaussovou–Jordanovou eliminací soustavy lineárních rovnic

$$(a)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 2.12 Vyřešte soustavy lineárních rovnic

$$(a)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right), \quad (c)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 2.13 Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -9 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Co se stane s množinou řešení když pravou stranu změníme na samé nuly? Nebo jinak?

Cv. 2.14 Určete, které homogenní soustavy mají stejné množiny řešení

$$(a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

$$(c)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad (d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Cv. 2.15 Kolik existuje různých REF tvarů (typově bez konkrétních čísel) pro matice 3×4?

Cv. 2.16 Nechť matice A je v REF tvaru. Jaké podmatice A jsou také v REF?

Cv. 2.17 Proč se dělají elementární úpravy na řádky a ne na sloupce?

Cv. 2.18 Jaké jsou oblíbené neekvivalentní řádkové úpravy?

Cv. 2.19 Uvažujme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-3} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

(a) Vyřešte soustavu přesně.

(b) Vyřešte soustavu s aritmetikou s omezenou přesností na 3 číslice a bez pivotizace.

(c) Vyřešte soustavu s aritmetikou s omezenou přesností na 3 číslice a s částečnou pivotizací (pivotem je kandidát s největší absolutní hodnotou).

Cv. 2.20 Najděte

(a) soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) čtvercovou soustavu s řešením

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) + t \cdot (2, 1, 1), \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Cv. 2.21 Najděte soustavu 3×4 mající za řešení

(a) $t \cdot (-2, 1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$,

(b) $t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (-3, 0, 2, 1)$, $t, s \in \mathbb{R}$,

Cv. 2.22 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

(a) ∞ pro každé b,

(b) 1 pro každé b,

(c) 0 nebo 1, v závislosti na b,

(d) 0 nebo ∞, v závislosti na b.

Cv. 2.23 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r. Jaký musí být vztah mezi m, n, r, aby soustava rovnic $(A \mid b)$:

(a) měla jediné řešení pro každé b,

(b) neměla řešení aspoň pro jedno b,

(c) měla nekonečně mnoho řešení pro každé b,

(d) měla jediné řešení nebo žádné řešení, v závislosti na b.

Cv. 2.24 Může se při elementárních řádkových úpravách matice A objevit řádek r nebo s?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.25 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & -9 \\ 1 & -5 & 4 & 13 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -15 \end{array}\right).$$

Cv. 2.26 Víme, že $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ a všechny prvky matice $(A \mid b)$ brány postupně po řádcích tvoří aritmetickou posloupnost. Víme-li ještě, že řešení soustavy je jednoznačné, máte všechny indicie jej nalézt!

Nelineární soustavy

Cv. 2.27 Vyřešte soustavu nelineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\sin\alpha & -\cos\beta & 3\tan\gamma & 3 \\ 4\sin\alpha & 2\cos\beta & -2\tan\gamma & 10 \\ 6\sin\alpha & -3\cos\beta & 1\tan\gamma & 9 \end{array}\right).$$

Cv. 2.28 Vyřešte soustavy nelineárních rovnic

(a) $xyz = 1,\ xy = 2,\ yz = 3.$

(b) $xy^3z = 12,\ \sqrt{x}\,y = 2,\ yz^2 = 6.$

Soustavy s parametry

Cv. 2.29 Vyřešte soustavy lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$(a)\ \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right), \quad (c)\ \left(\begin{array}{cc|c} a & a+3 & 2a+1 \\ 2a-1 & 2a+1 & a \end{array}\right),$$

$$(d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2a+1 & a & 2a & 1 \\ a & 1 & a+1 & 0 \\ 2a & 0 & 2a & 0 \end{array}\right).$$

Cv. 2.30 Pro jaké parametry mají soustavy řešení?

$$(a)\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & b_1 \\ 3 & 1 & b_2 \\ 1 & 7 & b_3 \\ 2 & 4 & b_4 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{array}\right).$$

Velké soustavy

Cv. 2.31 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$

$$(a)\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad (b)\quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & (-1)^{n+1}(n+1) \end{array}\right).$$

3 Operace s maticemi

Maticový součin: $A \in \mathbb{R}^{m\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, pak $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}$.

Ukázka 3.1 (Základní operace s maticemi)**.** Spočtěte následující výrazy:

(a) $2A$,

(b) $A+B$,

(c) $A-B$,

(d) C^T,

(e) Cv,

(f) AB,

(g) BC,

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) Pokud matice A je řádu $m \times n$ výsledná matice bude také řádu $m \times n$. Výslednou matici získáme tak, že každou složku matice A násobíme příslušnou konstantou (tj. hodnotou 2). Dostáváme:

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Abychom mohli sečíst matice A, B musí mít shodné rozměry (všimněme si, že obě jsou shodného řádu 2×2). Výsledná matice bude mít stejné rozměry jako matice A (resp. B), tedy 2×2. Výsledek získáme sčítáním po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je součtem hodnot z matice A a B na dané pozici. Dostáváme:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-1) \\ 2+0 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Obdobně jako v předchozím případě, matice A, B musí být shodného řádu a výsledná matice bude také daného řádu. Výsledek získáme rozdílem po složkách, tj. každá pozice výsledné matice je rozdílem hodnot z matice A a B na dané pozici. Tedy dostáváme:

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-(-1) \\ 2-0 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že na rozdíl matic můžeme také pohlížet jako na součet matice A s maticí $(-1)B$.

(d) Je-li původní matice rozměrů $m \times n$, transponovaná matice bude mít rozměry $n \times m$. Její prvek na pozici (i, j) je pak roven prvku, který je v původní matici na pozici (j, i). Proto získáváme:

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Je-li matice C řádu $m \times n$, musí v být n-složkový vektor a výsledkem bude m složkový vektor. V tomto případě je matice C řádu 2×3 a vektor v má 3 složky (řády tedy souhlasí) a výsledkem bude 2-složkový vektor. Výsledný vektor spočteme následovně:

$$Cv = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Na násobení jsme mohli také pohlížet jako na násobení matice C řádu 2×3 s maticí odpovídající vektoru v řádu 3×1.

(f) Je-li matice A řádu $m \times n$ musí být matice B řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě obě matice A, B jsou řádu 2×2 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude také řádu 2×2. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(g) Je-li matice B řádu $m \times n$ musí být matice C řádu $n \times \ell$ a výsledná matice bude řádu $m \times \ell$. V tomto případě je matice B řádu 2×2 a matice C řádu 2×3 (tedy řády souhlasí) a výsledná matice bude řádu 2×3. Výslednou matici spočteme následovně:

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ukázka 3.2 (Formální důkaz vlastnosti)**.** Dokažte $(AB)^T = B^T A^T$.

Řešení: Aby výrazy dávaly smysl, musí matice mít rozměry $A \in \mathbb{R}^{m \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Pak výsledné matice na obou stranách rovnice mají rozměr $n \times m$, a prvek na pozici (i, j) jest roven

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{p} A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^{p} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{p} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij}.$$

□

Ukázka 3.3 (Kvíz)**.** Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí: $A + A = 2A$.

(b) Pro libovolnou čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ platí: $A - A^T = A^T - A$.

Řešení:

(a) Nejprve ověříme, že obě strany mají smysl.

Pro levou stranu potřebujeme ověřit, že sčítání dává smysl. Tedy potřebujeme, aby obě matice v součtu byly stejného řádu. To je pravda ať zvolíme A libovolně, tedy levá strana má smysl vždy. *(Pozor na opomíjení tohoto kroku. Může se stát, že tvrzení platí ale pouze pokud obě strany dávají smysl. Uvažte například následující tvrzení: Pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times p}$: $A + B - B = A$.)*

Na pravé straně násobíme matici A konstantou 2. Tuto operaci můžeme provést s libovolnou maticí A, tedy pravá strana má také vždy smysl.

Poté zkontrolujeme rozměry matice na levé a pravé straně. Na levé straně sčítáme dvě matice řádu $m \times n$ a výsledkem je, dle definice sčítání matic, matice řádu $m \times n$. Na pravé straně násobíme matici řádu $m \times n$ konstantou a výsledkem je (podle definice násobku) matice řádu $m \times n$. Obě strany mají tedy shodné rozměry.
(Všimněte si, že při dokazování se odkazujeme na definice z přednášky. Podobně bychom se mohli odkazovat i na věty, lemmata, atp.)

Pozor, pokud tento krok opomeneme, může se stát, že matice na levé straně má n řádků a m sloupců, kdežto na pravé straně je jich více. Po složkách můžete ukázat, že levou horní podmatici velikosti $n \times m$ mají obě strany shodnou, ale to nedokazuje rovnost obou stran (která neplatí)!

Nakonec musíme ukázat rovnost po složkách. Pro libovolný řádek i a sloupec j se podíváme na (i, j)-tou složku levé strany a ukážeme, že je rovna (i, j)-té složce pravé strany:

$$\begin{aligned}
(A + A)_{ij} &= A_{ij} + A_{ij} && \text{(rozepíšeme dle definice sčítání)} \\
&= 2A_{ij} && \text{(nyní pracujeme s čísly z } \mathbb{R}\text{, tedy můžeme sečíst)} \\
&= (2A)_{ij} && \text{(použijeme definici násobení matice konstantou)}
\end{aligned}$$

(b) Pokud tvrzení neplatí uvádíme protipříklad. Tedy zvolíme matici A, která splňuje předpoklady ale neplatí pro ni závěr.

V tomto případě můžeme třeba za A zvolit následující matici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jediný předpoklad je, že A je čtvercová a ten je pro náš příklad zjevně splněn. Zároveň

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T - A.$$

Pokud splnění některého z předpokladů (resp. nesplnění závěru) není triviální, mělo by být součástí řešení zdůvodnění, proč předpoklady platí (resp. závěr neplatí). Případně můžeme dodat, za jakých předpokladů by tvrzení platilo. V našem případě tvrzení platí tehdy a jen tehdy, když A je symetrická.

□

Ukázka 3.4. Najděte takový vektor $x \in \mathbb{R}^n$, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Řešení: Je důležité dívat se na soustavu lineárních rovnic z pohledu maticového násobení. Zde vlastně chceme, abychom po vynásobení matice vektorem $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dostali požadovaný vektor napravo. Maticové násobení znamená, že první sloupec matice násobíme x_1, druhý sloupec x_2 až n-tý sloupec x_n, pak to všechno sečteme a ve výsledku chceme dostat vektor na pravé straně. Na řešení soustavy lineárních rovnic se tudíž můžeme též dívat jako na všechny možné n-tice čísel, které, když jimi vynásobíme popořadě sloupce matice, nám dají vektor na pravé straně. Zde je vidět, že poslední sloupec matice je shodný s vektorem na pravé straně, takže jedno z možných řešení bude $x = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$. Pokud provedeme Gaussovu eliminaci, zjistíme, že soustava má právě jedno řešení, a to naše x. □

Ukázka 3.5 (Výpočetní složitost násobení matic)**.** Určete kolik operací + a $\cdot$ je potřeba k vynásobení dvou matic o rozměrech $n \times n$.

Řešení: Představme si naše obdélníkové schéma na násobení matic, výsledná matice má rozměr $n \times n$. To znamená, že potřebujeme spočítat n^2 prvků výsledné matice. Každý prvek podle definice násobení dostaneme vynásobením n příslušných prvků z příslušného řádku a sloupce a $(n-1)$-krát použijeme operaci + na sečtení těchto n produktů. Celkem tedy použijeme n^3 násobení a $n^3 - n^2$ sčítání.

Poznámka. Často se operace + a $\cdot$ berou jako trvající stejnou dobu (což ne vždy musí být pravda) a označují se jako elementární operace. Zavádí se notace $O(f(n))$ tzv. *asymptotická složitost*, která říká, že algoritmus provede „zhruba“ $f(n)$ operací na vstupu o rozměru n. Například pro polynomy nás zajímá nejvyšší mocnina, a to bez koeficientu. Je to rozumné z toho důvodu, že když za n dosadíme hodně velké číslo, převáží jen ty členy s největší mocninou. Tímto dokážeme algoritmy klasifikovat do tříd podle $O(f(n))$. Algoritmus násobení matic se vstupem o rozměrech n vykoná celkem $2n^3 - n^2$ operací, což je $O(n^3)$. □

Ukázka 3.6 (Blokové matice)**.** Určete, jaké rozměry musí mít dané podmatice, aby mělo smysl blokové násobení

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vyjdeme z podmínek, že počet řádků matic A, B je stejný, a podobně pro páry (C, D), (E, F) a (G, H). Analogicky, počet sloupců matic A, C je stejný, a podobně pro ostatní. Dále, součiny AE, BG, ... musí dávat smysl. Dohromady nám z toho vyplývají takovéto rozměry:

$$\begin{aligned} &A : m_1 \times n_1, \quad B : m_1 \times n_2, \quad E : n_1 \times p_1, \quad F : n_1 \times p_2, \\ &C : m_2 \times n_1, \quad D : m_2 \times n_2, \quad G : n_2 \times p_1, \quad H : n_2 \times p_2. \end{aligned}$$

□

Cvičení

Cv. 3.1 Vyjmenujete vlastnosti maticového sčítání, násobení a transpozice.

Cv. 3.2 Najděte příklad nekomutativnosti násobení čtvercových matic 2×2.

Cv. 3.3 Dokažte z definice:

(a) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
(b) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
(c) $A(B + C) = AB + AC$,
(d) $I_n A = A$.

Cv. 3.4 Rozhodněte, zda $A^T A = AA^T$ pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Cv. 3.5 Dokažte:

(a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$,
(b) $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Cv. 3.6 Určete $e_i^T A e_j$.

Cv. 3.7 Matice A má nulový i-tý řádek. Co můžeme říci o výsledku

(a) AB?
(b) BA?

Cv. 3.8 Rozhodněte, zda platí pro čtvercové matice:

(a) $AB = 0 \;\Leftrightarrow\; (A = 0 \vee B = 0)$.

(b) $AB = AC \;\Rightarrow\; B = C$.

Cv. 3.9 Najděte všechny matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takové, že:

(a) $A^2 = 0$.

(b) $A^2 = I_2$.

Cv. 3.10 Výpočetní složitost.

(a) Buď A matice řádu 10×5, B matice řádu 5×20, a C matice řádu 20×1. Jak co nejefektivněji (co do počtu aritmetických operací) spočítat součin ABC?

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Chceme-li určit $A^k b$, je rychlejší (=stojí méně aritmetických operací) spočítat to pomocí $A(A(\dots(Ab)))$ nebo pomocí $(A^k)b$, kde A^k vypočítáme *šikovným* mocněním A (tj., s využitím mocnin typu $A, A^2, A^4, A^8, \dots$)? Existuje ještě jiný, rychlejší způsob? Zkuste konkrétně pro $k = 2^8$ a $n = 30$.

Cv. 3.11 Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{211}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{n}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}^{n}, \begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{n}1_n \\ 0_n & \frac{1}{n}1_n \end{pmatrix}^{n}, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{n}$.

Cv. 3.12 Co je výsledkem součinu $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A$?

Cv. 3.13 Ukažte, že součin horních trojúhelníkových matic je zase horní trojúhelníková matice. (A je horní trojúhelníková pokud $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$.)

Cv. 3.14 Co dělají matice elementárních řádkových úprav při násobení matice A zprava?

Cv. 3.15 Hodnost.

(a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Určete $\operatorname{rank}(ab^T)$.

(b) Rozhodněte, zda pro každé $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA)$.

(c) Rozhodněte, zda existují $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $\operatorname{rank}(AB) < \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.

Cv. 3.16 Máme $A, B^T \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ takové, že

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte BA. (*Hint:* rozdělení matice do bloků.)

Cv. 3.17 Najděte matici $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tak, aby $QA = \mathrm{RREF}(A)$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Je matice Q jednoznačná?

Cv. 3.18 Dokažte, že pokud $AB = I$ a $BC = I$, potom $A = C$.

Cv. 3.19 Najděte čtvercovou matici A řádu n splňující $I - A = A^2$.

Cv. 3.20 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že $ABAB = 0$. Musí pak $BABA = 0$?

Cv. 3.21 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r. Upravíme matici A na RREF tvar B a pak upravíme matici B^T na RREF tvar C. Jak vypadá matice C?

Cv. 3.22 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $k \geq 1$. Platí vždy $\mathrm{rank}(A^k) = \mathrm{rank}(\mathrm{RREF}(A)^k)$?

Cv. 3.23 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A \geq 0$ a $A^k > 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $A^{k+1} > 0$. (Nerovnost se myslí v každé složce matice.)

Cv. 3.24 Najděte matici $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takovou, aby pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platilo:

(a) $BA = 5A$,
(b) $BA = 5B$,
(c) všechny řádky BA byly stejné jako první řádek A.

Cv. 3.25 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nenulová. Ukažte, že $A^2 = 0$ se stát může, ale $A^T A = 0$ nikdy nenastane.

Cv. 3.26 Matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spolu *komutují* pokud $AB = BA$.

(a) Najděte všechny matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, které komutují se všemi maticemi téhož řádu.
(b) Popište matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, které komutují s maticí složenou ze samých jedniček.
(c) Buď $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonální matice s různými prvky na diagonále. Ukažte, že D komutuje jen s diagonálními maticemi.
(d) Pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komutující dokažte maticovou binomickou větu: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Cv. 3.27 Ukažte, že součin matic $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ je možné vyjádřit jako $AB = a_1 b_1^T + \ldots + a_k b_k^T$, kde $a_i = A_{*i}$, $b_i = B_{i*}$.

Cv. 3.28 Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *stochastická* (nebo též *markovská*, srov. Sekce 24) pokud prvky leží v intervalu $[0, 1]$ a součet každého sloupce je 1. Dokažte, že součin markovských matic je markovská matice.

Cv. 3.29 Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *dvojitě stochastická* pokud prvky leží v intervalu $[0, 1]$ a součet každého řádku i sloupce je 1. Dokažte, že dvojitě stochastické matice jsou uzavřené

(a) na součin,
(b) na konvexní kombinace (tj., jsou-li $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dvojitě stochastické, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_k = 1$, pak $\sum_{i=1}^{k} \alpha_k A_k$ je dvojitě stochastická).

Cv. 3.30 Reprezentujte komplexní čísla spolu se sčítáním a násobením pomocí reálných matic 2×2.

Cv. 3.31 Symetrické matice.

(a) Je výsledkem součinu symetrických matic symetrická matice?
(b) Buď $AB = C$ a matice B, C symetrické. Musí pak být A také symetrická?
(c) Komutují symetrické matice? To jest, platí $AB = BA$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické?
(d) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Ukažte, že $C := AB - BA$ je antisymetrická (tj., $C^T = -C$).

Cv. 3.32 *Stopa* matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je číslo $\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$.

(a) Dokažte $\mathrm{trace}(A + B) = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B)$ pro libovolné $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(b) Dokažte $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$ pro libovolné $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
(c) Ukažte, že $\mathrm{trace}(ABC) = \mathrm{trace}(CBA)$ obecně neplatí.
(d) Dokažte $\mathrm{trace}(AB^T) = \mathrm{trace}(A^T B)$ pro libovolné $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
(e) Dokažte $\mathrm{trace}(A^T A) = 0$ právě tehdy když $A = 0$.
(f) Najděte $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takové, aby $AB - BA = I_2$.
(g) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymetrická, tj. $A^T = -A$. Specifikujte co nejvíc hodnotu $\mathrm{trace}(A)$ a $\mathrm{trace}(A^2)$.

(h) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Ukažte, že $\mathrm{trace}(AB)^2 \leq \mathrm{trace}(A^2B^2)$. (*Hint:* Uvažuj $\mathrm{trace}(AB-BA)^2$.)

Cv. 3.33 Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá *involutorní* pokud $A^2 = I_n$, *idempotentní* pokud $A^2 = A$, a *nilpotentní* pokud $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$.

(a) Rozhodněte, zda involutorní, idempotentní a nilpotentní matice jsou uzavřené na součin.

(b) Dokažte, že A je involutorní právě tehdy když $\frac{1}{2}(A + I)$ je idempotentní.

(c) Najděte nějakou netriviální třídu involutorních matic.

(d) Dokažte, že A je idempotentní právě tehdy když $I_n - A$ je idempotentní.

(e) Buď A nilpotentní matice. Dokažte $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

(f) Dokažte, že komutující nilpotentní matice jsou uzavřené na součin i součet.

4 Regulární a inverzní matice

Ukázka 4.1 (Test regularity)**.** Rozhodněte, zda následující dvě matice jsou regulární:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Elementárními řádkovými úpravami převedeme zadané matice na odstupňovaný tvar a otestujeme, zda mají plnou hodnost, to jest, zda diagonální prvky výsledné matice jsou nenulové.

1) Konkrétně matici A upravíme elementárními řádkovými úpravami takto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice má hodnost 3, protože má 3 pivoty. Tudíž je matice A regulární.

2) Druhou matici upravíme na REF tvar takto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice má hodnost rovnou 2, a proto je singulární. □

Ukázka 4.2 (Inverze matice – obecný postup)**.** Ukážeme postup na výpočet inverzní matici a jeho dvě různá zdůvodnění. Sestavíme rozšířenou matici $(A \mid I_n)$, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice, kterou chceme invertovat, a I_n je jednotková matice řádu n. Postupně provádíme elementární řádkové úpravy na rozšířenou matici, dokud ji nepřevedeme do RREF tvaru. Pokud v levé části je jednotková matice, na pravé straně pak stojí inverzní matice k A. V opačném případě je natice A singulární, a tudíž nemá inverzi. Proč to ale platí? Ukážeme dvě vysvětlení:

1) Víme, že řádkové úpravy jdou reprezentovat jako násobení původní matice zleva odpovídajícími elementárními (regulárními) maticemi. Označme jako E_i elementární matici i-té řádkové operace. Rozšířená matice se pak upravuje takto:

$$\left(A \mid I_n \right) \sim \left(E_1 A \mid E_1 I_n \right) \sim \left(E_2 E_1 A \mid E_2 E_1 I_n \right) \sim \left(\underbrace{E_k \dots E_2 E_1}_{B} A \,\middle|\, \underbrace{E_k \dots E_2 E_1 I_n}_{B} \right).$$

Poslední matice odpovídá tvaru $(I_n \mid B)$, kde $B = E_k \dots E_2 E_1 I_n$. Levá část této matice je $I_n = BA$. Pokud bychom chtěli být důslední, řekli bychom, že to plyne z asociativity násobení matic, neboť

$$E_k(\dots(E_2(E_1 A))\dots) = (E_k \dots E_2 E_1)A.$$

Protože součin BA dává jednotkovou matici, matice $B = A^{-1}$ je tedy hledaná inverzní matice.

2) Původní úlohu rozdělíme na n podúloh podle jednotlivých sloupců. V i-té podúloze budeme hledat i-tý sloupeček inverzní matice B k matici A. Řešíme rovnici

$$Ax_i = e_i,$$

kde e_i je i-tý jednotkový vektor a x_i je neznámý vektor. Soustavu budeme řešit Gaussovou–Jordanovou eliminací. Pokud je původní matice A regulární, tak po provedení eliminace máme na levé straně jednotkovou matici a na pravé straně se nám rovnou objeví řešení soustavy. Je vidět, že když tento postup provedeme pro všechny sloupce i, spočítáme postupně inverzní matici. Bude platit

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Co nám ale brání, abychom Gaussovu–Jordanovu eliminaci provedli pro všechny sloupce pravých stran najednou? Nic, protože postup eliminace závisí jen na matici A. Můžeme uvažovat soustavu, která bude mít několik pravých stran – všechny jednotkové vektory z jednotkové matice. Rozšířenou matice $(A \mid I_n)$, pokud to lze, eliminujeme na tvar $(I_n \mid B)$ a nyní by již mělo být jasné, proč B je inverzní matice k A. □

Ukázka 4.3 (Inverze matice)**.** Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Elementárními řádkovými úpravami převedeme $(A \mid I_3)$ na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Máme tedy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a správnost ověříme vynásobením AA^{-1} a porovnáním s I_n. □

Ukázka 4.4 (Maticové výrazy)**.** S využitím vlastností matic můžeme s maticovými výrazy pracovat skoro tak dobře jako s klasickými aritmetickými výrazy. Například, mějme $A, B, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A je regulární. Vyjádřete neznámou matici X z výrazu

$$(AX)^T = B.$$

Řešení: Obě strany rovnice transponujeme a dostaneme

$$AX = B^T.$$

Nyní rovnici vynásobíme zleva maticí A^{-1} a dostaneme

$$X = A^{-1}B^T.$$

Zde je nutné nahlédnout, že násobení regulární maticí (což A^{-1} jest) je ekvivalentní úpravou – zpět se mohu dostat vynásobením rovnice maticí A. Druhá věc, která vyžaduje pozornost, je ta, že jsme násobili A^{-1} zleva. Maticové násobení není komutativní, proto záleží na pořadí násobení. Při násobením zleva dostane levá strana rovnice tvar $A^{-1}AX = I_nX = X$, kde máme hledanou matici X. Naopak, při násobení zprava by levá strana rovnice měla tvar AXA^{-1}, což obecně není rovno X. □

Cvičení

Regulární matice

Cv. 4.1 Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má jeden nulový sloupec. Je singulární nebo regulární?
A co když $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má jeden nulový řádek?

Cv. 4.2 Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A je regulární a B singulární. Jaký je součin AB?

Cv. 4.3 Ukažte, že pokud $A^2 - A + I_n = 0$, pak matice A je regulární.

Cv. 4.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a $a \in \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, zda $A + aa^T$ je také regulární.

Cv. 4.5 Rozhodněte, pro která $a, b \in \mathbb{R}$ je matice řádu $n \geq 2$ regulární

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.6 Matice A řádu n má na diagonále lichá čísla a jinde sudá čísla. Může být matice singulární?

Cv. 4.7 Zjistěte pro které n je matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, pokud její prvky jsou definovány:

(a) $a_{ij} = i \cdot j$,

(b) $a_{ij} = i + j$.

Cv. 4.8 Buď $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Pro jaké hodnoty vektoru a je matice $I_n + aa^T$ regulární?

(b) Pro jaké hodnoty vektoru a je matice $I_n - aa^T$ regulární?

*Cv. 4.9 *(Souboj o regularitu)* René a Simona hrají hru s maticí řádu $n \geq 2$. René přiřadí nějakému políčku libovolné reálné číslo, pak Simona přiřadí jinému políčku číslo atd. dokud se nezaplní celá matice. René vyhraje, pokud je matice regulární, a Simona vyhraje, pokud je singulární. Má někdo vítěznou strategii? A jaká bude situace, když začne Simona?

Inverzní matice

Cv. 4.10 Spočítejte $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.11 Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.12 Spočítejte $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.13 Upravte:

(a) $(ABC)^{-1}$,

(b) $A(B^TA)^{-1}(AB)^T$.

Cv. 4.14 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Cv. 4.15 Matice A, B se liší záměnou 2. a 3. řádku. Jak se liší matice A^{-1}, B^{-1}?

Cv. 4.16 Buď A symetrická regulární matice. Bude A^{-1} také symetrická?

Cv. 4.17 Jak co nejefektivněji určit A^{-1}_{*j}, A^{-1}_{i*}?

Cv. 4.18 Jak co nejefektivněji určit hodnotu $A^{-1}Bd + A^{-1}Cd$?

Cv. 4.19 Buď $A, B, C, D, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A, B, C jsou regulární. Vyjádřete neznámou matici X ze vztahu

(a) $A(BX)^T C = D$,
(b) $((X^{-1}A^{-1})^T - (B^T)^{-1})B^{-1} = 0$.

Cv. 4.20 Součet každého sloupce regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je roven α. Ukažte, že součet každého sloupce A^{-1} je roven $1/\alpha$.

Cv. 4.21 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární s kladnými čísly. Dokažte, že počet nul v A^{-1} je nanejvýš $n(n-2)$.

Cv. 4.22 Spočítejte

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}^{-1}, \quad ({}^*e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Cv. 4.23 Buď $\alpha \neq 0$. Spočítejte $\begin{pmatrix} \alpha I_n & I_n \\ I_n & \alpha I_n \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.24 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A regulární, platí $(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}$.

Cv. 4.25 Dokažte $A(I_n - A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}A$.

Cv. 4.26 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tak, že $A^4 = 0$. Dokažte, že $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.

Cv. 4.27 Nechť A^2 má inverzní matici B. Dokažte, že A je regulární a vyjádřete její inverzi.

Cv. 4.28 Dokažte pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) Je-li $A^2 = 0$, pak $I_n - A$ je regulární.
(b) Je-li $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n - A$ je regulární.
(c) Je-li $A^k = 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak $I_n + A$ je regulární.

Cv. 4.29 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvaru $A = I_n - B$, kde $b_{ij} = 0$ pro $i \leq j$.

(a) Ukažte, že $B^n = 0$.
(b) Ukažte, že $A^{-1} = I + B + B^2 + \ldots + B^{n-1}$.
(c) Spočítejte podle předchozího vztahu A^{-1} pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Cv. 4.30 Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $AB + A + B = 0$. Dokažte $AB = BA$, tedy matice spolu komutují.

Cv. 4.31 Jaké jsou hodnoty v matici A^{-1} když prvky A jsou z oboru $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)?

Cv. 4.32 Porovnejte množiny řešení soustavy $Ax = b$ a soustavy $(QA)x = Qb$.

Cv. 4.33 Najděte netriviální matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující:

(a) $A = A^{-1}$

(b) $A = -A^{-1}$

Cv. 4.34 Dokažte $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(BAB^{-1})$.

Cv. 4.35 Rozhodněte, zda platí $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Blokové matice

Cv. 4.36 Vyjádřete:

(a) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární.

(b) $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární.

(c) $\begin{pmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$ pro A, B čtvercové. Nahlédněte, že výsledek říká, že maticové násobení lze zredukovat na maticovou inverzi.

(d) $\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$ pro A, B, C čtvercové.

(e) Jak vypadá následující matice s $\alpha \neq 0$ po jedné iteraci Gaussovy eliminace?

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & a^T & \beta \\ c & A & b \end{array}\right).$$

Cv. 4.37 Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujme $A^+, A^-, |A| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s prvky $(A^+)_{ij} := (a_{ij})^+$, $(A^-)_{ij} := (a_{ij})^-$, $(|A|)_{ij} := |a_{ij}|$ jako matice kladných částí, záporných částí a absolutních hodnot. Dokažte, že obě matice A, $|A|$ jsou zároveň regulární právě tehdy, když je regulární matice

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A^+ & A^- \\ A^- & A^+ \end{pmatrix}.$$

Hint: Využijte vlastnosti $r = r^+ - r^-$ a $|r| = r^+ + r^-$ pro libovolné $r \in \mathbb{R}$.

Shermanova–Morrisonova formule

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \tfrac{1}{1+c^T A^{-1} b} A^{-1} bc^T A^{-1}.$$

Cv. 4.38 Jak se změní inverzní matice k A pokud k prvku a_{ij} přičteme $\alpha \in \mathbb{R}$?

Cv. 4.39 Najděte vzoreček pro $(I_n + ab^T)^{-1}$, kde $a, b \in \mathbb{R}^n$ jsou takové, že $a^T b \neq -1$.

Cv. 4.40 Invertujte matici řádu n s dvojkami na diagonále a jedničkami jinde.

Cv. 4.41 Víme $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Bez přímého výpočtu určete

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

5 Grupy, tělesa

Ukázka 5.1. Dokažte, že v grupě s operací $\cdot$ a neutrálním prvkem 1 platí: Pokud $a \cdot b = c \cdot a = 1$, pak $b = c$.

Řešení:

$$c \overset{\text{[neutrální prvek 1]}}{=} c \cdot 1 \overset{\text{[ze zadání]}}{=} c \cdot (a \cdot b) \overset{\text{[asociativita }\cdot\text{]}}{=} (c \cdot a) \cdot b \overset{\text{[za zadání]}}{=} 1 \cdot b \overset{\text{[neutrální prvek 1]}}{=} b. \qquad \square$$

Ukázka 5.2 (Počítání v $\mathbb{Z}_p$)**.** Spočítáme $4+4$, $3 \cdot 2$, $2-3$, 3^{-1}, $3/4$ v tělese $\mathbb{Z}_5$. Každá operace v $\mathbb{Z}_5$ se počítá modulo 5 (zbytek po dělení 5), aby výsledek opět patřil do množiny $\{0,1,2,3,4\}$. Neoficiální kroky značíme do uvozovek – jsou zde uvedeny pro představu, jak dojít k výsledku.

$$\begin{aligned} 4+4 &= \text{„}8 \bmod 5\text{“} = 3, \\ 3 \cdot 2 &= \text{„}6 \bmod 5\text{“} = 1, \\ 2-3 &= 2+(-3) = 2+2 = 4, \\ 3^{-1} &= 2, \text{ neboť } 2 \cdot 3 = 1, \\ 3/4 &= 3 \cdot 4^{-1} = 3 \cdot 4 = 2. \end{aligned} \qquad \square$$

Ukázka 5.3. Spočítejte 2^{2011} v $\mathbb{Z}_5$

Řešení: Stačí si všimnout, že

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1, \\ 2^1 &= 2, \\ 2^2 &= 4, \\ 2^3 &= 8 \bmod 5 = 3, \\ 2^4 &= 16 \bmod 5 = 1. \end{aligned}$$

Tedy $2^{2011} = 2^{2008} \cdot 2^3 = 1 \cdot 3 = 3$. Druhá možnost je využít Malou Fermatovu větu, která říká: „Pro každé prvočíslo p a každé $a \in \{1,\dots,p-1\}$ platí $a^{p-1} = 1$ v tělese $\mathbb{Z}_p$.“ Pak dostaneme hned, že $2^4 = 1$ v $\mathbb{Z}_5$. $\square$

Ukázka 5.4 (Soustava rovnic nad $\mathbb{Z}_p$)**.** Řešte následující soustavu nad $\mathbb{Z}_3$ bez prohazování řádků.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení: Provádíme klasickou Gaussovu eliminaci, pouze s tím rozdílem, že operace jsou nad tělesem $\mathbb{Z}_3$. Navíc si můžeme uvědomit, že prvky pod pivotem lze vynulovat přičtením vhodného násobku řádku s pivotem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Po provedení zpětné substituce dostáváme řešení $(1,0,0)^T + x_3 \cdot (1,1,1)^T$. Matice má hodnost menší než 3, avšak nedostáváme nekonečně mnoho řešení, neboť parametr x_3 může nabývat pouze hodnot ze $\mathbb{Z}_3$, tedy $0,1,2$. Celkově tedy máme tři řešení $(1,0,0)^T$, $(2,1,1)^T$, $(0,2,2)^T$. $\square$

Cvičení

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je grupou

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
(b) $(\mathbb{Q}, -)$,
(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$,
(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $\circ$ je průměr čísel a, b (aritmetický, ...),
(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $\circ$ je definováno: $a \circ b \coloneqq a + b + 3$,
(f) množina reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sčítáním $(\mathcal{F}, +)$,
(g) množina otočení v $\mathbb{R}^2$ podle počátku se skládáním,
(h) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ se skládáním.

Cv. 5.2 Najděte vlastní příklady grup a negrup.

Cv. 5.3 Buď $(G, \circ)$ grupa a $x \in G$ pevné. Rozhodněte, zda je grupou $(G, \star)$ s operací $a \star b \coloneqq a \circ x \circ b$.

Cv. 5.4 Rozhodněte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right);\, z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým násobením.
(b) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right);\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým násobením.
(c) množina $\big\{S\left(\begin{smallmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)S^{-1};\, C \in \mathbb{R}^{k\times k}$ je regulární$\big\}$ s maticovým násobením, kde $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq k$, je pevná regulární matice.

Cv. 5.5 Buď $\mathbb{IR}$ množina reálných uzavřených intervalů s operacemi

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_1 + b_2],$$
$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), \max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)].$$

Vyšetřete algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +)$, $(\mathbb{IR}, \cdot)$.

Cv. 5.6 V grupě $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverzním a^{-1} k a proveďte:

(a) najděte e^{-1},
(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.
(c) dokažte z definice, že pokud $ab = a$, tak nutně $b = e$,
(d) rozhodněte, zda $a^4 = b^4$ implikuje $a = b$,
(e) rozhodněte, zda $a^3 = b^3$ implikuje $a = b$.

Cv. 5.7 Zjistěte, zda je podgrupou

(a) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,
(b) $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, kde $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$,
(c) $(\text{sudá celá čísla}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$,
(d) $(\text{lichá celá čísla}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$,
(e) $(\mathbb{Z}_n, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

Cv. 5.8 Najděte nejmenší podgrupu $(\mathbb{Z}, +)$ obsahující prvky 6 a 15.

Cv. 5.9 Ukažte, že všechny podgrupy $(\mathbb{Z}, +)$ jsou tvaru $\{az;\, z \in \mathbb{Z}\}$ pro určité $a \in \mathbb{Z}$.
Platí totéž i o podgrupách $(\mathbb{R}, +)$?

Cv. 5.10 Buď $(G, \circ)$ grupa. Ukažte, že $\emptyset \neq H \subseteq G$ je podgrupou právě tehdy, když $ab^{-1} \in H$ pro každé $a, b \in H$.

Cv. 5.11 Najděte nějakou netriviální podgrupu grupy funkcí $(\mathcal{F}, +)$.

Cv. 5.12 Najděte nějakou netriviální podgrupu grupy matic $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$.

Cv. 5.13 Najděte nějakou netriviální podgrupu grupy regulárních matic $(GL_n, \cdot)$.

Cv. 5.14 Najděte nějakou operaci, která je komutativní, ale ne asociativní.

Cv. 5.15 Buďte H_1, H_2 podgrupy grupy $(G, \circ)$. Ukažte, že

(a) $H_1 \cap H_2$ je také podgrupa,
(b) $H_1 \cup H_2$ je podgrupa právě tehdy, když $H_1 \subseteq H_2$ nebo $H_1 \supseteq H_2$,
(c) nejmenší podgrupa obsahující $H_1 \cup H_2$ je tvořena všemi prvky $a_1 \circ b_1 \circ \ldots \circ a_n \circ b_n$ pro všechna $a_1, \ldots, a_n \in H_1$, $b_1, \ldots, b_n \in H_2$, $n \in \mathbb{N}$.

Tělesa

Cv. 5.16 Rozhodněte, zda je tělesem množina

(a) $\{-1, 0, 1\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(b) $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) \coloneqq \{p + \sqrt{2}q;\ p, q \in \mathbb{Z}\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \coloneqq \{p + \sqrt{2}q;\ p, q \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \coloneqq \{p + \sqrt[3]{2}q;\ p, q \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(e) $\mathbb{Q}(i) \coloneqq \{p + iq;\ p, q \in \mathbb{Q}\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(f) $\mathbb{Z}_5(i) \coloneqq \{p + iq;\ p, q \in \mathbb{Z}_5\}$ s klasickým sčítáním a násobením.
(g) Kartézský součin $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, kde operace $+, \cdot$ jsou po souřadnicích.
(h) $(2^M, \triangle, \triangle')$, kde $A \triangle B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ je symetrický rozdíl množin, a $A \triangle' B \coloneqq M \setminus (A \triangle B)$ je jeho doplněk.

Cv. 5.17 Procvička v tělese $\mathbb{Z}_p$. Například:

(a) spočítejte v Z_5 hodnoty $4 + 3$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$,
(b) spočítejte v Z_{11} hodnoty $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1}, $6/7$.

Cv. 5.18 Řešte soustavy rovnic bez prohazování řádků

$$(a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_3, \quad (b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2 \text{ a } \mathbb{Z}_5.$$

Cv. 5.19 Spočítejte v $\mathbb{Z}_7$ mocninu matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

Cv. 5.20 Invertujete matici

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_3 \text{ a } \mathbb{Z}_5, \quad (b)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ nad } \mathbb{Z}_7 \text{ a } \mathbb{Z}_{11}.$$

Cv. 5.21 Pro která prvočísla p je matice nad $\mathbb{Z}_p$ singulární?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 5.22 Určete počet regulárních matic řádu 2 nad tělesem $\mathbb{Z}_p$ (srov. cv. 15.25).

Cv. 5.23 Najděte polynom $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nad $\mathbb{Z}_5$ takový, aby $p(1) = 1$ a $p(2) = p(3) = p(4) = 2$.

Cv. 5.24 V $\mathbb{Z}_5$ najděte všechna řešení rovnice $x^4 + 3x^3 + 2x + x^{-1} = 0$.

Cv. 5.25 Spočítejte:

(a) 2^{2010} v $\mathbb{Z}_5$,
(b) 3^{2008} v $\mathbb{Z}_7$,
(c) $(8^7 + 7^8)^{12}$ v $\mathbb{Z}_{17}$,
(d) $2^{44} + 3^{22}2^{11}$ v $\mathbb{Z}_{17}$,
(e) zbytek při dělení $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ číslem 7,
(f) 5^{2008} v $\mathbb{Z}_{31}$.

Cv. 5.26 Proč nemůže být charakteristika tělesa rovna 1?

Cv. 5.27 Najděte co nejvíce těles charakteristiky 2.

Cv. 5.28 Jde v každém tělese $\mathbb{T}$ rozložit každý prvek $a \in \mathbb{T}$ na součet jedniček?

Cv. 5.29 Ukažte, že komutativitu sčítání v tělese lze odvodit z ostatních vlastností.

Malá Fermatova věta

$a^{p-1} = 1$ v $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo, $a \neq 0$.

Cv. 5.30 Jak najít a^{-1} pro $a \in \mathbb{Z}_p$?

Cv. 5.31 Spočítejte:

(a) 20^{3332} v $\mathbb{Z}_{31}$,
(b) 2^{2008} v $\mathbb{Z}_{11}$,
(c) $2^{60} + 7^{30}$ v $\mathbb{Z}_{13}$.

6 Permutace

skládání: $(q \circ p)(i) = q(p(i))$
znaménko: $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = (-1)^{\text{počet transpozic}}$

Ukázka 6.1 (Cykly, znaménko, a skládání permutací)**.** Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte je mezi sebou.

Řešení: Permutace p zobrazuje $1 \mapsto 2$, dále $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ a $4 \mapsto 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1,2,3,4)$, a analogicky najdeme druhý cyklus $(5,6)$. Cykly permutace p jsou proto $(1,2,3,4)(5,6)$ a podobně permutace q má cykly $(1)(2,3)(4,5,6)$.

Permutace p je zadaná na $n = 6$ prvních a skládá se z $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^{n-c} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\mathrm{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p, tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídit sloupce od nejmenšího. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4,3,2,1)(6,5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzí.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno,

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1,2,4,6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1,3,5,4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní. □

Cvičení

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $q \circ p$, $p \circ q$, $\mathrm{sgn}(p)$, p^{-1}, $\mathrm{sgn}(p^{-1})$. Tabulkou i přes cykly.

Cv. 6.2 Mějme permutaci
$$p = (1,3,4)(2,5)(6,11,10,9,8,7).$$
Spočítejte p^9 a p^{-14}.
Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Cv. 6.3 Najděte permutaci $p \in S_{10}$ aby $p^i \neq id$ pro $i = 1, 2, \dots, 29$.

Cv. 6.4 Rozložte $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic. Rozložte to ještě jiným způsobem. Jaký je nejmenší možný počet transpozic?

Cv. 6.5 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit z $n-2$ nebo $n-1$ transpozic.

Cv. 6.6 Dokažte, že pro každou permutaci p a index i takový, že $i < p(i)$ existuje j tak, že $j > p(j)$.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Cv. 6.8 Buď $q \in S_n$ pevné. Dokažte, že zobrazení $p \mapsto p \circ q$ na bijekce na S_n. Jak se mění znaménka permutací p při tomto zobrazení?

Cv. 6.9 Určete znaménko permutace
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6.10 Určete znaménko následujících permutací:

(a) $(1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$,
(b) $(1, 4, 7, \dots, 3n-2, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n)$,
(c) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$,
(d) $(3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2)$.

Cv. 6.11 Dokažte, že znaménko permutace p lze ekvivalentně definovat jako $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^s$, kde s je cyklů p sudé délky.

Cv. 6.12 Ukažte, že pro $n \geq 2$ je počet lichých a sudých permutací v S_n stejný.

Cv. 6.13 Buď $p \in S_n$ a uvažujme relaci R na množině $\{1, \dots, n\}$ definovanou vztahem $(x, y) \in R$ právě tehdy, když $x = p^i(y)$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$. Ukažte, že relace R je ekvivalence a její třídy jsou cykly permutace p.

Cv. 6.14 Najděte všechny permutace komutující s

(a) $p = (1, 2)(3)$.
(b) $p = (1, 2)(3, 4)$.

Cv. 6.15 Najděte všechny permutace splňující:

(a) $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$,
(b) $p \in S_{10}$ a $p^5 = (1, 3, 4, 7, 8, 9, 10)(2, 6)$,
(c) $p \in S_{2n}$ a $p^2 = (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n)$, kde $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou navzájem různá čísla z $\{1, \dots, 2n\}$,
(d) $p \in S_{2n}$ a $p^2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n)$. (Stačí nám jen jejich počet.)

Cv. 6.16 Spočítejte $p^{27} \circ q^{-27}$ pro

$$p = (1,3,5,7) \circ (2,5,8,1) \circ (9,10),$$
$$q = (6,4,1) \circ (9,10,8) \circ (4,8,7,1,5).$$

Cv. 6.17 Najděte co nejvíce permutací $p \in S_6$ splňujících $p = p^{-1}$.

Cv. 6.18 Kolem stolu sedí kolektiv matfyzáků. Z daného rozesazení (A) se přemístí do rozesazení (B) pomocí 17 vzájemných výměn dvou lidí. Lze přejít zpět pomocí 31, 26, resp. 13 výměn?

Cv. 6.19 Spočítejte průměrný počet cyklů v n-prvkové permutaci.

Cv. 6.20 Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace $p \in S_n$ má cyklus obsahující prvek 1 dlouhý přesně k.

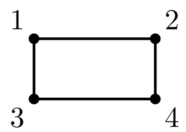
Cv. 6.21 Buď $p \in S_n$ permutace. Odpovídající *permutační matice* $P \in \mathbb{R}^n$ je definována takto: $P_{ij} = 1$ pokud $p(i) = j$ a nula jinak. Tedy P vznikne z matice I_n permutací sloupců podle permutace p.

(a) Dokažte, že $P^T P = I_n$, tedy $P^T = P^{-1}$.
(b) Ukažte, že P^{-1} je permutační matice a určete jaké odpovídá permutaci.
(c) Nechť Q je matice permutace q. Ukažte, že PQ je permutační matice a určete jaké odpovídá permutaci.
(d) Buď $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jak vypadá BP a jak PB?
(e) Ukažte, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $A^k = I_n$. Najděte co nejtěsnější horní mez v závislosti na n.
(f) Najděte P řádu 5 takovou, aby $P^6 = I_5$ byla nejmenší taková mocnina.
(g) Nechť P odpovídá permutaci $p = (1,n)(2,n-1)\ldots$ Jak vypadá matice PAP?

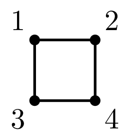
Symetrická grupa permutací

Cv. 6.22 Rozhodněte, zda je (Abelovou) grupou $(S_n, \circ)$.

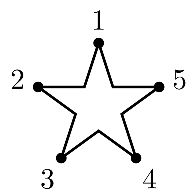
Cv. 6.23 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu $(S_4, \circ)$.



Cv. 6.24 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu $(S_4, \circ)$.



Cv. 6.25 Najděte všechny symetrie pěticípé hvězdy a popište je permutacemi.



Cv. 6.26 Ukažte, že postupným skládáním mohu z transpozic $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n)$ vygenerovat celé S_n.

Cv. 6.27 Ukažte, že pokud n je prvočíslo, tak postupným skládáním a invertováním mohu z jedné transpozice a cyklu na n prvcích vygenerovat celé S_n.

7 Vektorové prostory a podprostory

Ukázka 7.1 (Podprostory)**.** Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$

(a) $\mathcal{A} = \{(2s, s, |s|)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\mathcal{B} = \{(s, 5t, 2s - t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení: V zásadě, musíme ověřit, jestli množiny obsahují nulový vektor a jsou uzavřené na sčítání a násobky.

(a) Triviálně $0 \in \mathcal{A}$, stačí volit $s = 0$. Uzavřenost na součty ani násobky ale neplatí (pouze na nezáporné násobky), což prokážeme protipříkladem. Vezměme např. vektor $(2, 1, 1)^T$, který náleží do $\mathcal{A}$ díky volbě $s = 1$. Jeho opačný vektor $-(2, 1, 1)^T = (-2, -1, -1)^T$ ale do $\mathcal{A}$ nenáleží, protože třetí složka vektoru v $\mathcal{A}$ nemůže být záporná.

(b) Opět zřejmě $0 \in \mathcal{B}$. Ukažme uzavřenost na součty vektorů. Vezměme si libovolné dva vektory z $\mathcal{B}$, ty se dají obecně vyjádřit jako $(s, 5t, 2s - t)^T$ a $(s', 5t', 2s' - t')^T$ pro vhodné volby $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$. Jejich součet je $(s, 5t, 2s - t)^T + (s', 5t', 2s' - t')^T = (s + s', 5(t + t'), 2(s + s') - (t + t'))^T$, což je opět vektor náležící do množiny $\mathcal{B}$. Podobně se ukáže uzavřenost na násobky. Buď $\alpha \in \mathbb{R}$ a $(s, 5t, 2s - t)^T \in \mathcal{B}$. Pak $\alpha(s, 5t, 2s - t)^T = ((\alpha s), 5(\alpha t), 2(\alpha s) - (\alpha t))^T$ má také vyjádření z definice $\mathcal{B}$ a proto do množiny náleží. □

Ukázka 7.2 (Lineární obal)**.** Rozhodněte, zda vektor $(4, -1, 1)^T$ náleží do lineárního obalu vektorů $(2, 1, 1)^T$ $(1, 2, 1)^T$.

Řešení: Lineární obal konečné množiny je charakterizován jako množina všech lineárních kombinací vektorů této množiny. Tedy vektor náleží do daného lineárního obalu právě tehdy, když lze vyjádřit jako lineární kombinace těchto vektorů. Konkrétně, hledáme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ aby

$$(4, -1, 1)^T = \alpha(2, 1, 1)^T + \beta(1, 2, 1)^T.$$

Toto vyjadřuje soustavu tří rovnic o dvou neznámých

$$\left(\begin{array}{cc|r} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Soustavu vyřešíme a najdeme řešení $\alpha = 3$, $\beta = -2$, tudíž odpověď zní: „Ano“. □

.... Cvičení ....

Vektorové prostory

Cv. 7.1 Jmenujte příklady vektorových prostorů.

Cv. 7.2 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{R}$, tedy posloupnosti reálných čísel.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) 2^M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde M je daná množina, součet množin $A, B \subseteq M$ je definován $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a násobek množiny jako $0A = \emptyset$ a $1A = A$.

(b) V^n nad $\mathbb{T}$, kde V je vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobky jsou definovány po složkách.

(c) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobky jsou definovány po složkách.

(d) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

(e) množina všech rotací v prostoru $\mathbb{R}^n$, kde součet je definován jako složení rotací a α-násobek jako rotace o α-násobný úhel.

(f) $\mathbb{Z}_5^n$ nad $\mathbb{Z}_2$ s přirozeným součtem a násobky.

(g) množina $V = \{0, 1, \ldots, 6\}$ nad $\mathbb{Z}_5$ s operacemi součet $x \oplus y = (x + y) \bmod 6$ a násobek $\alpha \odot x = (\alpha x) \bmod 6$.

(h) kladná reálná čísla $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$, je-li $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$.

Cv. 7.4 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$ s předefinovanými operacemi:

(a) $x \oplus y = o$, $\alpha \odot x = \alpha x$

(b) $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2, y_3)$, $\alpha \odot x = \alpha x$

(c) $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_3)$

(d) $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = (\alpha x_1, 2\alpha x_2, 3\alpha x_3)$

Cv. 7.5 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Cv. 7.6 Najděte vektorový prostor s právě 25 vektory. Najděte ještě další dva.

Cv. 7.7 Dokažte, že v každém vektorovém prostoru V nad $\mathbb{T}$ platí

(a) $\alpha o = o, \quad \forall \alpha \in \mathbb{T}$,

(b) $(-1)v = -v, \quad \forall v \in V$.

Cv. 7.8 Mějme U, V prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Může $U \cap V = \emptyset$?

Podprostory

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s - 2, 3s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(e) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(f) $\{(s, t)^T \in \mathbb{R}^2;\ |s| = |t|\}$.

Cv. 7.10 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozhodněte, zda $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$.

Cv. 7.11 Rozhodněte, zda jsou podprostorem prostoru matic $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad $\mathbb{R}$:

(a) magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo),

(b) latinské čtverce (tj. matice, u nichž je v každém řádku i sloupci každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ právě jednou),

(c) singulární matice,

(d) regulární matice,

(e) horní trojúhelníkové matice,

(f) matice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komutující s danou $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tj. $AX = XA$.

Cv. 7.12 Rozhodněte, zda matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $\operatorname{trace}(A^2) = \operatorname{trace}(A)^2$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Cv. 7.13 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

(a) posloupnosti tvaru $(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$,

(b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,

(c) posloupnosti s konečně mnoha nenulami

(d) rostoucí, neklesající, monotónní posloupnosti,

(e) konvergentní posloupnosti,

(f) omezené posloupnosti,

(g) aritmetické posloupnosti ($x_i - x_{i-1} = \text{konst.}$),

(h) fibonacciovské posloupnosti ($x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$).

Cv. 7.14 Rozhodněte, zda $\{p \in \mathcal{P}^3;\, p(2) = p(7)\}$ tvoří podprostor $\mathcal{P}^3$.

Cv. 7.15 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$:

(a) po částech lineární funkce,

(b) periodické reálné funkce.

Lineární obal

Cv. 7.16 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí:

(a) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(d) $M \subseteq N \subseteq \operatorname{span}(M) \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(N)$,

(e) $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$,

(f) $\operatorname{span}(V \setminus M) = \operatorname{span}(V \setminus \operatorname{span}(M))$.

Cv. 7.17 Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$, $(3, 4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Cv. 7.18 Vyjádřete $7x - 7$ jako součet násobků polynomů $x^2 + x$, $x + 2$ a $x^2 - x + 3$.

Cv. 7.19 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, -2)^T$,

(b) $(1, 0, 0)^T$, $(0, 2, 0)^T$, $(0, 0, -3)^T$,

(c) $(1, 1, 1)^T$, $(2, 1, 3)^T$, $(3, 1, 5)^T$,

(d) $(2, 1, 3)^T$, $(3, 1, 2)^T$, $(1, 1, 1)^T$,

(e) $(2, 1, 3)^T$, $(3, 1, 4)^T$, $(1, 1, 2)^T$.

Cv. 7.20 Rozhodněte, zda vektory $(1,1,0,1)^T$, $(0,1,0,1)^T$, $(0,1,1,0)^T$, $(1,1,1,0)^T$, $(0,0,1,1)^T$ generují $\mathbb{R}^4$ resp. $\mathbb{Z}_2^4$.

Cv. 7.21 Rozhodněte, zda $U = V$ pro

(a) $U = \text{span}\{(1,2,0)^T, (0,1,-1)^T\}$, $V = \text{span}\{(2,1,3)^T, (-1,0,-2)^T\}$,

(b) $U = \text{span}\{(1,2,-1)^T, (2,1,1)^T\}$, $V = \text{span}\{(0,3,-3)^T, (3,3,-1)^T\}$.

Cv. 7.22 Buď $M = \{a,b,c,d,e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako výlučná disjunkce a násobky přirozeně.

(a) najděte nulový vektor o,

(b) určete opačný vektor $-v$ k vektoru $v = \{a,b,c\}$,

(c) vyhodnoťte lineární kombinaci $u+v-w-z$, kde $u = \{a,d\}$, $v = \{b,e\}$, $w = \{c,e\}$ a $z = \{a,b,c\}$.

(d) rozhodněte, zda vektor $\{a,b,c,d,e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z,

(e) Nahlédněte, že vektorový prostor se chová podobně jako prostor $\mathbb{Z}_2^5$ nad $\mathbb{Z}_2$.

Cv. 7.23 Buď V vektorový prostor a $M \subseteq V$ množina vektorů (konečná či nekonečná). Dokažte, že $\text{span}(M)$ je tvořený všemi konečnými lineárními kombinacemi vektorů z M.

8 Lineární nezávislost

Ukázka 8.1 (Lineární nezávislost)**.** Rozhodněte, zda vektory $(1,3,2)^T$, $(2,5,3)^T$, $(2,3,1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení: Vektory jsou lineárně nezávislé pokud pouze jejich jediná lineární kombinace dá nulový vektor, a to triviální, kdy všechny koeficienty jsou nulové. Hledejme tedy lineární kombinace dávající nulový vektor:

$$\alpha(1,3,2)^T + \beta(2,5,3)^T + \gamma(2,3,1)^T = (0,0,0)^T,$$

což vede na soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Soustavu vyřešíme upravením matice na tvar

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení a určitě najdeme nějaké nenulové, např. $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$. To znamená, že dané vektory jsou lineárně závislé. □

Cvičení

Cv. 8.1 Je pod/nadsystém lineárně (ne)závislého systému vektorů lineárně (ne)závislý?

Cv. 8.2 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.3 Zjistěte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T,\ (1,-1,1)^T,\ (3,2,-2)^T$,

(b) $(2,0,3)^T,\ (1,-1,1)^T,\ (0,2,1)^T$,

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.5 Najděte množinu aritmetických vektorů se složkami z $\{0,1,2\}$ tak, aby

(a) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

(b) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$ i v $\mathbb{Z}_3^n$,

(c) byly lineárně nezávislé v $\mathbb{R}^n$, ale závislé v $\mathbb{Z}_3^n$,

(d) byly lineárně závislé v $\mathbb{R}^n$, ale nezávislé $\mathbb{Z}_3^n$.

Cv. 8.6 Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1,a,1)^T$, $(1,1,1)^T$ a $(2,2,a)^T$ lineárně nezávislé?

Cv. 8.7 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních, Cv. 8.8 Buďte u, v, w lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé:

(a) $o,\ u,\ v$

(b) $u,\ 2u,\ w,$

(c) $w,\ v,\ u,$

(d) $u,\ v+w,$

(e) $u+v,\ u-v,\ u+w,\ u-w,$

(f) $u-v,\ 2v+w,\ -u-v+3w,$

Cv. 8.9 Ukažte, že vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1+v_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} v_i$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 8.10 Buďte $u_1, \dots, u_n$ lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte kdy jsou lineárně nezávislé vektory $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$.

Cv. 8.11 Zjistěte, zda jsou vektory z prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$ lineárně nezávislé:

(a) $2x-1,\ x-1,\ 3x,$

(b) $\sin x,\ \cos x,$

Cv. 8.12 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U+V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u+v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

*Cv. 8.13 Dokažte, že sloupce $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $A^T A$ je regulární.

Cv. 8.14 Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro nekonečnou množinu vektorů M prostoru V:

(a) M je lineárně nezávislá,

(b) existuje $v \in M$, který je lineární kombinací několika jiných vektorů z M,

(c) neexistuje konečná netriviální lineární kombinace vektorů z M rovna o,

(d) pro každou vlastní podmnožinu $N \subsetneq M$ je $\operatorname{span}(N) \subsetneq \operatorname{span}(M)$.

9 Báze, dimenze

Ukázka 9.1 (Báze, souřadnice)**.** Rozhodněte, zda vektory $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 1)$, $(3, 2, 1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$, a pokud ano, najděte souřadnice vektoru $v = (5, 1, 2)$ vzhledem k této bázi.

Řešení: Nejprve ověříme, že vektory jsou lineárně nezávislé. Protože jsou tři a dimenze $\mathbb{R}^3$ je rovněž tři, musí tvořit bázi.

Souřadnice hledáme tak, že najdeme lineární kombinaci bázických vektorů, která je rovna v

$$\alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 5, 1) + \gamma(3, 2, 1) = (5, 1, 2).$$

Přepíšeme to jako soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Soustava musí mít jediné řešení, a skutečně, po vyřešení dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$. Tedy souřadnice vektoru v vzhledem k bázi jsou $(1, -1, 2)$. □

Ukázka 9.2 (Báze)**.** Buď V podprostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tvořený maticemi, jejichž oba řádky mají stejný součet prvků. Najděte bázi a spočítejte dimenzi V.

Řešení: Matice tohoto podprostoru mají tvar

$$\begin{pmatrix} a & c-a \\ b & c-b \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou libovolné. Takto je součet prvního i druhého řádku roven c, a přitom takto popíšeme všechny požadované matice. Obecný tvar si rozložíme

$$\begin{pmatrix} a & c-a \\ b & c-b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní je vidět, že matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ generují V. Vzhledem k tomu, že žádná z těchto matic se nedá vygenerovat z ostatních (má na určité pozici nenulu, kde ostatní mají nuly), matice jsou lineárně nezávislé a tudíž představují bázi V. Tím pádem $\dim V = 3$. □

Ukázka 9.3 (Dimenze)**.** Uvažujme následující podprostory prostoru $\mathbb{R}^4$

$$U = \operatorname{span}\{(1, 0, 1, 0)^T,\ (1, 2, 3, 4)^T\},$$
$$V = \operatorname{span}\{(2, 2, 1, 1,)^T,\ (3, 2, 1, 0)^T\}.$$

Spočítejte $\dim(U \cap V)$.

Řešení: Hledanou dimenzi pak spočítáme podle vzorečku $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V)$. Protože zřejmě generátory podprostoru U i V jsou lineárně nezávislé, tak $\dim U = \dim V = 2$. Dimenzi spojení $U + V$ spočítáme jako dimenzi prostoru generovaného generátory U i V dohromady, tedy jako hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem určíme, že hodnost je 3, tudíž dimenze průniku podprostorů je $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$. □

. . . . **Cvičení** . . . .

Báze

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,
(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(d) $\mathcal{P}^2$,
(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,
(f) $\mathbb{R}^{m\times n}$ nad $\mathbb{R}$,
(g) symetrické matice v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.2 Tvoří vektory $(1,0,2)^T$, $(2,1,3)^T$, $(0,0,2)^T$, $(0,1,0)^T$ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$?

Cv. 9.3 Najděte bázi prostoru $\mathbb{R}^4$ obsahující vektor $(1,2,3,4)^T$.

Cv. 9.4 Zjistěte, zda $(-1,5,3) \in \operatorname{span}\{(1,2,2),(4,1,3)\}$ a pokud ano tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.5 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi x^2+1, $x-2$, $2x^2+x-1$.

Cv. 9.6 Najděte bázi prostoru $\{p \in \mathcal{P}^5;\ p(x) = -p(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 9.7 Najděte bázi prostoru $\{x \in \mathbb{R}^5;\ x_1 + x_3 = x_2 + 2x_4 = x_5\}$.

Cv. 9.8 Najděte příklad vektorového prostoru jehož bázi tvoří on sám.

Cv. 9.9 Buď B báze vektorového prostoru V. Dokažte, že $v_1,\dots,v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jejich souřadnice $[v_1]_B,\dots,[v_n]_B \in V$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 9.10 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1,a_2,a_3,a_4)$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi

(a) $B' = \{z_4,z_3,z_2,z_1\}$.
(b) $B' = \{z_1+z_4,z_2,z_3,z_4\}$.
(c) $B' = \{z_1+z_4,z_2+z_3,z_4,z_2\}$.

Cv. 9.11 Upravováním pouze jediné matice rozhodněte, zda vektory $(2,3,2)^T$, $(1,1,-1)^T$ tvoří bázi prostoru $\operatorname{span}\{(1,2,3)^T, (5,8,7)^T, (3,4,1)^T\}$.

Cv. 9.12 Uvažme báze $\mathbb{R}^2$: $B = \{(1,1)^T, (1,2)^T\}$ a $B' = \{(3,4)^T, (2,3)^T\}$. Víme-li, že pro jisté $u,v \in \mathbb{R}^2$ je $[u]_B = (1,1)^T$ a $[v]_B = (2,1)^T$, tak najděte bázi B'' aby $[u]_{B'} = [v]_{B''}$ a $[v]_B = [u]_{B''}$.

Cv. 9.13 Buď B báze prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte, že všechny matice z B nemohou navzájem komutovat (mohou jen některé).

Cv. 9.14 Ukažte, že prostor reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$ nemá spočetnou bázi.

Dimenze

$$\dim U + \dim V = \dim(U+V) + \dim(U\cap V)$$

Cv. 9.15 Najděte všechny podprostory $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.16 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Cv. 9.17 Buď $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ množina vektorů nějakého prostoru nad $\mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{span} V) = n-1$, $n \geq 3$. Kolika způsoby lze z V vybrat bázi span(V) pokud víme, že

(a) $v_1 = o$

(b) $v_1 = 2v_2$

(c) $v_1 = u_2 - u_3$

Cv. 9.18 Buďte U, V podprostory W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklad kdy se nabydou meze.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$.

Cv. 9.19 Označme U prostor symetrických matic řádu 3 a V prostor horních trojúhelníkových matic řádu 3.

(a) Najděte bázi a určete dimenzi prostoru U a V.

(b) Co představuje prostor $U \cap V$ a jaká je jeho dimenze?

(c) Co představuje prostor $U + V$ a jaká je jeho dimenze?

Cv. 9.20 Označme poprostory prostoru $\mathcal{P}^2$

$$U := \{ax^2 + ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}\},$$
$$V := \{ax^2 + bx + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Najděte bázi a určete dimenzi prostoru U a V,.

(b) Co představuje prostor $U \cap V$ a jaká je jeho dimenze?

(c) Co představuje prostor $U + V$ a jaká je jeho dimenze?

Cv. 9.21 Buďte $U \Subset V$ prostory takové že, $1 + \dim U = \dim V$, a buď B báze U. Dokažte, že $B \cup \{x\}$ je báze V právě tehdy když $x \in V \setminus U$.

Cv. 9.22 Spočítejte $\dim(U \cap V)$ pro

(a) $U = \operatorname{span}\{(1,2,0,0)^T,\ (1,0,0,-1)^T\}$, $V = \operatorname{span}\{(0,1,1,0)^T,\ (1,1,-1,1)^T\}$ podprostory $\mathbb{R}^4$,

(b) $U = \operatorname{span}\{(0,1,0)^T,\ (1,1,0)^T\}$, $V = \operatorname{span}\{(0,1,1)^T,\ (1,0,1)^T,\ (1,1,0)^T\}$ podprostory $\mathbb{R}^3$,

(c) předchozí bráno v $\mathbb{Z}_2^3$.

Cv. 9.23 Rozhodněte, zda každý polynom stupně nanejvýš 2 (*sic!*) lze vyjádřit jako lineární kombinaci polynomů $x^3 - x^2 + 2$, $2x^2 + x$, $x^3 + x^2 - x$ a $x^3 + x^2 + 1$.

Cv. 9.24 Najděte bázi a určete dimenzi prostoru $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{P}^2$.

Cv. 9.25 Buď M prostor reálných matic 3×3 takových, že součty v řádkách a sloupcích se rovnají. Určete dimenzi tohoto prostoru a najděte libovolnou bázi.

Cv. 9.26 Buď $u_1, \dots, u_m$ báze U, a buď $v_1, \dots, v_n$ báze V. Najděte bázi a určete dimenzi prostoru $U \times V$.

Cv. 9.27 Určete dimenzi prostorů nad tělesem $\mathbb{Q}$

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}c;\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \{a + \sqrt{2}b + \sqrt{3}b;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Cv. 9.28 Určete dimenzi podprostoru generovaného všemi permutačními maticemi řádu 2.

Cv. 9.29 Rozhodněte, zda platí zobecnění věty o dimenzi a spojení na 3 podprostory U, V, W:

$$\begin{aligned}\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \dim(U \cap W)\\ - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W).\end{aligned}$$

Cv. 9.30 Buď $(G, +)$ grupa taková, že $a + a = e$ pro každé $a \in G$. Ukažte, že počet prvků grupy je 2^n pro určité $n \in \mathbb{N}$. (*Hint:* Uvědomte si, proč je příklad zařazen v této sekci.)

Cv. 9.31 Buď $x_1, \ldots, x_m \in V$, $\dim(V) = n$ a buď $m \geq n + 2$. Ukažte, že existuje netriviální lineární kombinace $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = o$ taková, že $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$.

Direktní součet

Cv. 9.32 Dokažte: Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 9.33 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Je-li $u_1, \ldots, u_m$ báze U a $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ je báze W.

Cv. 9.34 Buď U podprostor $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že z vektorů $e_1, \ldots, e_n$ lze vybrat bázi určitého prostoru $V \Subset \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbb{R}^n = U \oplus V$.

Cv. 9.35 Buďte $B_1, \ldots, B_n$ báze podprostorů $V_1, \ldots, V_n$ prostoru V. Ukažte, že $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$ právě tehdy, když báze $B_1, \ldots, B_n$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocením dostaneme bázi V.

Dále rozhodněte, zda $V_i \cap V_j = \{o\}$ pro všechna $i \neq j$ implikuje, že $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n$.

Cv. 9.36 Buďte U, V podprostory stejné dimenze v prostoru Z. Ukažte, že existuje podprostor W takový, že $Z = U \oplus W = V \oplus W$.

10 Maticové prostory

Pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ platí:

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = n - \dim \operatorname{Ker}(A).$$

Ukázka 10.1 (Výběr báze)**.** Uvažujme vektory z $\mathbb{R}^5$

$$(1,2,3,4,5)^T,\ (1,1,1,1,1)^T\ (1,3,5,7,9)^T,\ (2,1,1,0,0)^T.$$

Najděte bázi a určete dimenzi prostoru V, generovaného zadanými vektory.

Řešení: Sestavíme matici A, jejíž sloupce představují dané vektory. Nyní máme $V = \mathcal{S}(A)$. Převedeme matici na RREF tvar:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix} \overset{RREF}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RREF tvar matice má 3 bázické sloupce (3 pivoty), proto má hodnost 3, a tudíž i $\dim(V) = 3$. Bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý, což nám říká, které z původních vektorů tvoří bázi – je to: $(1,2,3,4,5)^T$, $(1,1,1,1,1)^T$, $(2,1,1,0,0)^T$. Přímo z řádků či sloupců matice RREF(A) bázi nevyčteme! Mimochodem, třetí z vektorů je závislý na ostatních a z RREF tvaru vidíme, že je roven dvojnásobku prvního minus druhý.

Jiný postup je naopak vložit zadané vektory do řádků do matice B a opět upravit na RREF tvar (nyní máme $V = \mathcal{R}(A)$):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{RREF}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 3, tudíž ve shodě s předchozím je $\dim(V) = 3$. Nyní ale bázi vyčteme přímo ze řádků výsledné matice: $(1,0,0,-1,-1)^T$, $(0,1,0,1,0)^T$, $(0,0,1,1,2)^T$. Na druhou stranu, RREF tvar zde nic neříká o tom, které z původních vektorů lze vybrat do báze. $\square$

Ukázka 10.2 (Řádkový a sloupcový prostor)**.** Určete dimenzi a najděte bázi řádkového a sloupcového prostoru matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve převedeme matici na (redukovaný) odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \overset{RREF}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenzi řádkového a sloupcového prostoru matice můžeme zjistit pomocí hodnosti matice, platí vztah

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{rank}(A) = 2.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ dostaneme přímo z nenulových řádků v odstupňovaném tvaru RREF(A), tedy

$$B_{\mathcal{R}(A)} = \left\{ \left(1, 0, 1, \tfrac{3}{2}\right)^T, \left(0, 1, 1, -\tfrac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Bázi sloupcového prostoru vybereme z původních sloupcových vektorů matice A. Volíme sloupce, které odpovídají bázickým sloupcům RREF(A), tj. první a druhý sloupec:

$$B_{\mathcal{S}(A)} = \left\{ (1, 3, 4)^T, (1, 1, -4)^T \right\}. \qquad \square$$

Ukázka 10.3 (Jádro matice)**.** Určete dimenzi a najděte bázi jádra matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Upravíme matici na RREF tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{RREF}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je 2, tudíž dle vzorce $\dim \mathrm{Ker}(A) = n - \mathrm{rank}(A)$, kde n je počet sloupců matice A, spočítáme $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4 - 2 = 2$. Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ získáme vyřešením soustavy $Ax = o$, k čemuž využijeme RREF tvaru nahoře. Stačí si jen představit nulovou pravou stranu (kterou nemusíme psát, protože se nezmění), nebázické proměnné x_3, x_4 za parametry a vyjádřit řešení ve tvaru $(6x_3 + 4x_4, -4x_3 - 3x_4, x_3, x_4)^T = x_3(6, -4, 1, 0)^T + x_4(4, -3, 0, 1)^T$. Bázi jádra A tvoří tedy např. vektory $(6, -4, 1, 0)^T$, $(4, -3, 0, 1)^T$. Tento postup funguje pro každou matici, protože nebázických proměnných je přesně tolik jaká je dimenze jádra, a proto vektory u těchto proměnných (v našem případě $(6, -4, 1, 0)^T$, $(4, -3, 0, 1)^T$) musí dát bázi $\mathrm{Ker}(A)$. $\square$

Cvičení

Cv. 10.1 Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1, 2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$

(b) $(1, 2)^T \in \mathcal{S}(A)$

Cv. 10.2 Určete $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(1, 2, 3)^T \in \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ b & 1 & -1 \\ 2 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)$, $(1, 2)$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$.

Najděte ještě jinou takovou matici.

Cv. 10.4 Najděte matici A takovou, že $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^4$ a $\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^3$.

Cv. 10.5 Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

najděte báze prostorů $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$.

Cv. 10.6 Buď $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ regulární a označme $B = (A \mid A)$. Najděte báze prostorů $\mathcal{S}(B)$, $\mathcal{R}(B)$, $\mathrm{Ker}(B)$.

Cv. 10.7 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $v \in \mathcal{R}(A)$. Ukažte, že $v^T x$ je konstantní pro všechna řešení soustavy $Ax = b$.

Cv. 10.8 Určete dimenzi prostoru generovaného vektory

(a) $(1,3,5,6)^T$, $(3,9,15,18)^T$, $(0,0,0,0)^T$
(b) $(1,2,3,4)^T$, $(1,5,1,2)^T$, $(1,1,2,3)^T$
(c) $(1,2,2,-2)^T$, $(2,1,1,1)^T$, $(0,3,3,-5)^T$
(d) $(1+i, 1-i, i)^T$, $(1-i, 1+3i, 1+i)^T$, $(1+i, 1-i, 1)^T$

Cv. 10.9 Určete dimenzi prostoru $V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ s využitím maticových prostorů.

Cv. 10.10 Určete dimenzi a bázi prostoru $V = \{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$.

Cv. 10.11 Připomeňme, že $e = (1, \ldots, 1)^T$. Určete dimenzi prostoru

$$\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3};\ \exists \alpha \in \mathbb{R} : Ae = \alpha e\}.$$

Dokážete zobecnit výsledek pro čtvercové matice řádu n? A dokážete zobecnit výsledek pro obecné těleso $\mathbb{T}$?

Cv. 10.12 Najděte matici A takovou, aby báze $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ byla $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ byla $(1,-2,1)^T$.

Cv. 10.13 Rozšiřte vektory $(1,2,1)$, $(2,-2,-1)$ na bázi $\mathbb{R}^3$.

Cv. 10.14 Z vektorů vyberte bázi a pro ostatní najděte souřadnice vůči této bázi:

(a) $v_1 = (1,2,-1)^T,\ v_2 = (-1,8,-1)^T,\ v_3 = (-4,2,2)^T$,
(b) $v_1 = (1,0,2,-3)^T,\ v_2 = (3,2,1,-5)^T,\ v_3 = (-1,2,1,-2)^T,\ v_4 = (-3,0,2,0)^T$,
(c) $v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,2)^T$.

Cv. 10.15 V prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ určete který z vektorů $(2,5,5)^T$, $(4,4,0)^T$, $(4,1,2)^T$ je závislý na ostatních.

Cv. 10.16 Zjistěte, zda se rovnají prostory

$$U = \mathrm{span}\{(1,2,0)^T,\ (0,1,-1)^T\} \ \text{ a } \ V = \mathrm{span}\{(2,1,3)^T, (1,0,2)^T\}.$$

Cv. 10.17 Najděte všechny symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ s jedničkami na diagonále a vektorem $(1,2,3)^T$ v jádru A.

Cv. 10.18 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti k. Ukažte, že existují $B \in \mathbb{R}^{m\times k}, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ takové, že $A = BC$.

Cv. 10.19 Báze jádra matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \le n$.

(a) Nechť A jde převést elementárními řádkovými úpravami na tvar $(I_m \mid B)$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{R}\begin{pmatrix} -B \\ I_{n-m} \end{pmatrix}$, tedy sloupce matice vpravo tvoří jádro matice A.
(b) Ukažte, že každá matice A lze převést na tvar $(I_m \mid B)$ po vhodné permutaci sloupců a po vynechání lineárně závislých řádků. Jak se pak změní její jádro?

Cv. 10.20 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Spočítejte rank $\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & BA^{-1}B^T \end{pmatrix}$.

Cv. 10.21 Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$?

Cv. 10.22 Rozhodněte, zda platí pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ implikuje $A = B$.
(b) Pokud matice A, B mají stejné všechny tři základní prostory, pak jsou až na násobek stejné.
(c) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ implikuje $A = QB$ pro nějakou regulární matici Q.
(d) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ právě tehdy když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.
(e) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ právě tehdy když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.

Cv. 10.23 Rozhodněte, zda platí pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) $\mathcal{R}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{o\}$.
(b) $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(A) \;\Rightarrow\; A^2 = 0$.
(c) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2) \;\Leftrightarrow \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A^2)$.

Cv. 10.24 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r. Navrhněte postup jak sestrojit matice $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ a $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ tak, aby $A = BC$. Jaké hodnosti mohou matice B, C nabývat?

Cv. 10.25 Rozhodněte, zda platí: $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

Cv. 10.26 Buď A matice tvaru $A = uv^T + wz^T$, kde $u, w \in \mathbb{R}^m$, $v, z \in \mathbb{R}^n$.

(a) Najděte generátory prostorů $\mathcal{S}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$.
(b) Kdy má matice A hodnost 1?

Cv. 10.27 Buďte A, B čtvercové matice řádu $2n + 1$ takové, že $AB = 0$. Ukažte, že

(a) aspoň jedna z matic A, B má hodnost nanejvýš n,
(b) aspoň jedna z matic $A + A^T$, $B + B^T$ je singulární.

Cv. 10.28 Dokažte (v tomto pořadí), že pro $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ platí

*(a) $\dim \mathrm{Ker}(AB) \leq \dim \mathrm{Ker}(A) + \dim \mathrm{Ker}(B)$.
(b) $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n$.
(c) $\mathrm{rank}(ABC) \geq \mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) - \mathrm{rank}(B)$. (*Hint:* Rozložte $B = B_1B_2$, kde $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{r\times p}$ a $r = \mathrm{rank}(B)$).

Cv. 10.29 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte $\mathrm{rank}(A^k) - \mathrm{rank}(A^{k+1}) \geq \mathrm{rank}(A^{k+1}) - \mathrm{rank}(A^{k+2})$. (*Hint:* Použijte jádro matice.)

Speciálně, buď $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ taková, že $A^3 = 0$ a $A^2 \neq 0$. Jaké jsou možnosti pro $\mathrm{rank}(A)$ a $\mathrm{rank}(A^2)$?

*Cv. 10.30

(a) Město Lichosudov má n obyvatel a m klubů. Každý klub má lichý počet členů, ale každé dva kluby mají v průniku sudý počet členů. Dokažte $m \leq n$.
(b) V tichomořském souostroví Darwinlandia roste m druhů květin na n ostrovech. Navíc je známo, že každý druh rostliny se vyskytuje právě na k ostrovech a každé dva druhy rostlin se spolu vyskytují právě na $\ell \neq k$ ostrovech. Dokažte $m \leq n$.

11 Lineární zobrazení

Ukázka 11.1 (Test linearity zobrazení)**.** Dokažte, že zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadané předpisem $f(x,y,z) = (x-y,z)^T$ je lineární.

Řešení: Stačí ověřit dvě podmínky z definice.

- Buďte $(x_1,y_1,z_1)^T, (x_2,y_2,z_2)^T \in \mathbb{R}^3$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned} f((x_1,y_1,z_1)^T + (x_2,y_2,z_2)^T) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2-(y_1+y_2), z_1+z_2)^T, \\ f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2) &= (x_1-y_1,z_1)^T + (x_2-y_2,z_2)^T = (x_1+x_2-y_1-y_2, z_1+z_2)^T. \end{aligned}$$

  Obě hodnoty se rovnají, tedy $f(u+v) = f(u)+f(v)$ pro všechna $u,v \in \mathbb{R}^3$.

- Buďte $\alpha \in \mathbb{R}$ a $(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ libovolné. Pak

$$\begin{aligned} f(\alpha(x,y,z)^T) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha z)^T, \\ \alpha f(x,y,z) &= \alpha(x-y,z)^T = (\alpha x - \alpha y, \alpha z)^T. \end{aligned}$$

  Obě hodnoty se rovnají, tedy $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a $v \in \mathbb{R}^3$. □

Ukázka 11.2 (Matice otočení)**.** Najděte matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi, representující otočení podle počátku v rovině o úhel α proti směru hodinových ručiček.

Řešení: První kanonický vektor $(1,0)^T$ se otočí na $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$, a druhý kanonický vektor $(0,1)^T$ se otočí na $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$. Matice je tedy

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Ukázka 11.3 (Matice přechodu)**.** Najděte matici přechodu v $\mathbb{R}^3$ od báze

$$B_1 = \{(1,1,-1)^T,\ (3,-2,0)^T,\ (2,-1,1)^T\}$$

k bázi

$$B_2 = \{(8,-4,1)^T,\ (-8,5,-2)^T,\ (3,-2,1)^T\}.$$

Řešení: Bez počítání máme dílčí matice přechodu od dané báze ke kanonické bázi, protože sloupce matic jsou tvořeny danými vektory báze:

$$_{\mathrm{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad _{\mathrm{kan}}[id]_{B_2} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledanou matici přechodu pak můžeme spočítat například ze vztahu

$$_{B_2}[id]_{B_1} = {_{B_2}[id]_{\mathrm{kan}}} \cdot {_{\mathrm{kan}}[id]_{B_1}} = {_{\mathrm{kan}}[id]_{B_2}^{-1}} \cdot {_{\mathrm{kan}}[id]_{B_1}}.$$

Efektivní způsob jak vzoreček aplikovat je upravit do RREF tvaru rozšířenou matici $(\,_{\mathrm{kan}}[id]_{B_2} \mid {_{\mathrm{kan}}[id]_{B_1}})$, tedy

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -8 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{RREF}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & 6 \end{array}\right).$$

Pravá část výsledné matice je hledaná matice přechodu,

$$_{B_2}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

Ukázka 11.4 (Matice zobrazení s obecnou bází)**.** Mějme dánu matici lineárního zobrazení $f\colon U \to V$ vzhledem k bázím B_1, B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$, a mějme dány báze B_3, B_4 prostorů U, V. Navrhněte postup jak najít matici f vzhledem k bázím B_3, B_4, tj. ${}_{B_4}[f]_{B_3}$.

Řešení: Podle věty o matici složeného zobrazení, kdy skládáme $id \circ f \circ id = f$ s vhodnými bázemi, dostaneme

$$
{}_{B_4}[f]_{B_3} = {}_{B_4}[id]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot {}_{B_1}[id]_{B_3}\,.
$$

Tedy veškerou práci vykonají matice přechodu mezi bázemi. □

Ukázka 11.5 (Matice lineárního zobrazení)**.** Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem $f(x) = Ax$, kde

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.
$$

Mějme báze $B_1 = \{(1,2)^T, (2,1)^T\}$, $B_2 = \{(1,-1)^T, (0,1)^T\}$ a najděte matici zobrazení f vzhledem k bázím B_1, B_2.

Řešení: Obraz prvního vektoru báze B_1 je $f(1,2) = (5,-5)^T$, a jeho souřadnice vzhledem k bázi B_2 jsou $[f(1,2)]_{B_2} = (5,0)^T$. Podobně, obraz druhého vektoru báze B_1 je $f(2,1) = (4,2)^T$, a jeho souřadnice vzhledem k bázi B_2 jsou $[f(2,1)]_{B_2} = (4,6)^T$. Tudíž

$$
{}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.
$$

□

Ukázka 11.6 (Obraz vektoru při lineárním zobrazení)**.** Mějme dané lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ zadané maticí

$$
{}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

vzhledem k bázím

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(2,3,4)^T,\ (1,1,4)^T,\ (1,2,5)^T\},\\
B_2 &= \{2x^2 - 2x,\ 3x - 1,\ -x^2 - x + 3\}.
\end{aligned}
$$

Najděte obraz vektoru $x = (1,3,1)^T$.

Řešení: Postupujeme podle vzorečku

$$
[f(x)]_{B_2} = {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot [x]_{B_1}.
$$

Nejprve určíme souřadnice vektoru x vzhledem k bázi B_1. To vede na soustavu lineárních rovnic (viz ukázka 9.1), z níž spočítáme $[x]_{B_1} = (1,-2,1)^T$. Vektor souřadnic přenásobíme maticí

$$
{}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot [x]_{B_1} = (2,2,2)^T.
$$

Výsledný vektor představuje souřadnice hledaného obrazu, tedy $[f(x)]_{B_2} = (2,2,2)^T$. Není již těžké určit, že tyto souřadnice náleží vektoru $f(x) = 2x^2 + 4$. □

Cvičení

Lineární zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x,y) = (x, y+3)^T$,

(b) $f(x,y) = (0,0)^T$,

(c) $f(x,y) = (x+2y, y)^T$,

(d) $f(x,y) = (x^2, y)^T$,

(e) $f(x,y) = \max\{x,y\}$,

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ jsou lineární ($\mathcal{F}$ je prostor reálných funkcí):

(a) $f(x) \mapsto \alpha \cdot f(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je pevné,

(b) $f(x) \mapsto x \cdot f(x)$,

(c) $f(x) \mapsto x^2 \cdot f(x)$,

(d) $f(x) \mapsto f(x) - 7x$,

(e) $f(x) \mapsto f(x) - 7\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je pevné,

(f) $f(x) \mapsto f(x - \sin x)$,

Cv. 11.3 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,

(b) $f(A) = \mathrm{trace}(A)$,

(c) $f(A) = A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná,

(d) $f(A) = I_n$,

(e) $f(A) = A^2$,

(f) $f(A) = a_{11}$,

(g) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Cv. 11.4 Rozhodněte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ s předpisem $f(x_1,\dots,x_n) = (\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ lineární.

Cv. 11.5 Rozhodněte, zda zobrazení $(x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ na prostoru reálných posloupností je lineární.

Cv. 11.6 Rozhodněte, zda zobrazení $\log\colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ je lineární pro prostor ze cv. 7.3(h).

Cv. 11.7 $\mathcal{C}_{\langle a,b\rangle}$ je prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$. Rozhodněte, zda následující zobrazení $F\colon \mathcal{C}_{\langle a,b\rangle} \to \mathbb{R}$ jsou lineární:

(a) $F(f) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$,

(b) $F(f) = f(c)$, kde $c \in \langle a,b\rangle$ je pevné.

Cv. 11.8 Ukažte, že pri lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se střed úsečky mezi body $x, y \in \mathbb{R}^n$ zobrazí na střed jejich obrazu.

Cv. 11.9 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$, dimenze n a $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ nějaká jeho báze. Ukažte, že zobrazení $f\colon V \to \mathbb{T}^n$ definované předpisem $f(x) = [x]_B$ je lineární, a vymyslete nějaký příklad tohoto zobrazení.

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.10 Najděte obraz vektoru $(-1,1,2)^T$ při lineárním zobrazení definovaném:

$$f(1,0,0) = (1,1)^T,\ f(0,1,0) = (-1,2)^T,\ f(0,0,1) = (0,0)^T.$$

Cv. 11.11 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.
(b) Projekce na osu x.
(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.
(d) Projekce na osu x a pak projekce na osu y.
(e) Překlopení podle osy $(1,1)$.
(f) Projekce na přímku svírající s osou x úhel α proti směru hodinových ručiček.

Cv. 11.12 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v prostoru $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Projekce na rovinu os x, y.
(b) Zrcadlení (překlopení) skrze rovinu os x, y.
(c) Otočení o 180° v rovině os x, y.
(d) Složení otočení o 180° v rovině os x, y, potom v rovině os x, z a nakonec v rovině os y, z.

Cv. 11.13 Najděte reálnou matici $A \neq I_2$ takovou, aby $A^3 = I_2$.

Cv. 11.14 Buď $V \Subset \mathcal{F}$ s bází $B = \{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \cos^2 x\}$. Určete matici zobrazení derivace vzhledem k bázi B.

Cv. 11.15 O lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ víme, že $f \circ f = id$ a $f(1,2) = (-1,1)^T$. Najděte předpis pro f.

Matice přechodu

Cv. 11.16 Najděte matici přechodu od báze v_1, v_2, v_3, v_4 k bázi v_2, v_4, v_1, v_3.

Cv. 11.17 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a dívejme se na ní jako na matici přechodu.

(a) Jakou bázi převádí A na kanonickou?
(b) Na jakou bázi převádí A kanonickou bázi?

Cv. 11.18 V $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze:

$$B = \{(1,1,1)^T,\ (0,1,-1)^T,\ (2,0,1)^T\}, \quad B' = \{(3,2,2)^T,\ (1,0,1)^T,\ (1,2,2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B do kanonické.
(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B.
(c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)^T$ vzhledem k bázi B.
(d) Sestrojte matici přechodu od báze B' do B.

Cv. 11.19 Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B = \{x^2+1,\ x^2-3x+1,\ x^2+x+3\}, \quad B' = \{x^2+2x+1,\ 2x^2+1,\ x^2-x\}.$$

Cv. 11.20 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \{(1,1,0)^T, (1,0,0)^T, (0,1,-1)^T\}.$$

(a) Najděte bázi B takovou, aby A byla maticí přechodu od báze B do báze B', tj. ${}_{B'}[id]_B$.

(b) Najděte bázi B takovou, aby A byla maticí přechodu od báze B' do báze B, tj. ${}_{B}[id]_{B'}$.

Cv. 11.21 Buď ${}_{B_2}[id]_{B_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ matice přechodu od báze $B_1 = \{u, v\}$ do báze $B_2 = \{x, y\}$. Najděte matici přechodu

(a) od báze $\{v, u\}$ do báze $\{x, y\}$,

(b) od báze $\{5u, 2v\}$ do báze $\{x, y\}$,

(c) od báze $\{u + v, v\}$ do báze $\{x, y\}$.

Cv. 11.22 Buď $B = \{(0, -1, 2)^T,\ (-2, 2, -1)^T,\ (-1, 2, 1)^T\}$. Najděte bázi B' tak, aby pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^3$ platilo $x + [x]_B + [x]_{B'} = o$.

Matice lineárního zobrazení – obecný tvar

Cv. 11.23 Najděte matici lineárního zobrazení (vzhledem ke kanonické bázi) zobrazující:

(a) $(1,3)^T$ na $(4,-1)^T$,

(b) $(1,3)^T$ na $(1,1)^T$, a $(2,-1)^T$ na $(-1,-1)^T$,

(c) $(1,3)^T$ na $(1,1)^T$, a $(2,6)^T$ na $(-1,-1)^T$,

Cv. 11.24 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané: $f(e_1) = (1,-1,1)^T$, $f(e_2) = (0,1,1)^T$. Mějme báze $B_1 = \{(1,-1)^T,\ (1,1)^T\}$ a $B_2 = \{(1,-1,1)^T,\ (1,0,1)^T,\ (0,0,1)^T\}$. Spočítejte:

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$,

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{B_1}$,

(c) matici zobrazení od kanonické báze k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\mathrm{kan}}$,

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Cv. 11.25 Matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vzhledem k bázím $B = \{(1,1,0)^T,\ (1,0,1)^T,\ (0,1,1)^T\}$ a $B' = \{(1,1)^T,\ (2,0)^T\}$ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete obraz vektoru $(x,y,z)^T$.

Cv. 11.26 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ x^2\}$. Najděte ${}_{B'}[f]_{B'}$, je-li $B' = \{1,\ x,\ 1+x^2\}$.

Cv. 11.27 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané

$$f(2x^2 + x - 3) = x + 1,\ f(x^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x,\ f(-3x^3 - 2x + 4) = -x^2 - x$$

a bázi $B = \{2x^2 + x - 2,\ -2x + 1,\ x^2 - 1\}$. Najděte matici zobrazení vůči bázi B a kanonické, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_B$.

Cv. 11.28 Zvolte si bázi B prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) X^T$ určete matici vzhledem k B.

Cv. 11.29 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení zadané

$$f\colon a(1,1,3)^T + b(2,0,2)^T + c(2,3,1)^T \to \; a(1,1,1)^T + b(1,2,2)^T + c(1,1,0)^T.$$

Najděte matici inverzního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi.

Cv. 11.30 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,1,1) = (2,1,0)^T, \quad f(2,0,5) = (1,2,3)^T, \quad f(3,1,3) = (0,1,2)^T,$$

a buď V podprostor $\mathbb{R}^3$ s bází

$$B = \{(5,3,2)^T,\ (1,1,4)^T\}.$$

Najděte matici zobrazení f s omezeným definičním oborem na podprostor V vzhledem k bázi B a kanonické bázi.

Cv. 11.31 Buď f lineární zobrazení a B_1, B_2, B_3, B_4 odpovídající báze.

(a) Může ${}_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_4}[f]_{B_3}$ pro $B_1 \neq B_3$ a $B_2 \neq B_4$?

(b) Může ${}_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_4}[f]_{B_1}$ pro $B_2 \neq B_4$?

(c) Ovlivní nějak předchozí otázky situace, kdy f je isomorfismus?

Cv. 11.32 Ukažte, že pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$ existují báze prostorů U a V takové, že matice zobrazení f vzhledem k těmto bázím má tvar

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.33 Určete ${}_{\mathrm{kan}}[f \circ g]_{\mathrm{kan}}$ pro lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná

$$f(a,b,c) = (a-c,\ b-a,\ b+c)^T,$$
$$g(a,b,c) = (a+b+c,\ b+c,\ c)^T.$$

Cv. 11.34 Uvažujme lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

kde $B = \{(1,0,-1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,-2,1)^T\}$. Určete ${}_{\mathrm{kan}}[f \circ g]_{\mathrm{kan}}$.

Cv. 11.35 Uvažujme lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathrm{kan}}[g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

kde $B = \{(2,1,1)^T,\ (1,0,1)^T,\ (0,0,1)^T\}$. Určete ${}_{\mathrm{kan}}[f + g]_{\mathrm{kan}}$.

12 Obraz, jádro, isomorfismus

Ukázka 12.1 (Isomorfismus)**.** Rozhodněte, zda zobrazení s předpisem $f(x, y, z) = (x+y-2z,\ y-z,\ x-y)^T$ je isomorfismem na prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Sestavíme matici zobrazení f vzhledem ke kanonické bázi

$$
{}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Převodem na odstupňovaný tvar zjistíme, že její hodnost je 2, a proto f neni isomorfismem (matice by musela být regulární). Navíc to ukazuje, že f není ani prostá, ani na. □

Ukázka 12.2 (Lineární zobrazení prosté a „na“)**.** Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazem báze B

$$
\begin{aligned}
f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\
f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\
f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T.
\end{aligned}
$$

Rozhodněte, zda je zobrazení prosté a zda je „na“.

Řešení: Sestavíme matici zobrazení f vzhledem k zadané bázi B a kanonické bázi

$$
{}_{\mathrm{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Výpočtem zjistíme, že hodnost matice je 2, což znamená, že $\dim f(\mathbb{R}^3) = \mathrm{rank}({}_{\mathrm{kan}}[f]_B) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$. Obraz má tedy menší dimenzi než prostor $\mathbb{R}^3$ a tudíž zobrazení nemůže být „na“.

Dimenze jádra je $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}({}_{\mathrm{kan}}[f]_B) = 3 - \mathrm{rank}({}_{\mathrm{kan}}[f]_B) = 1$. Jádro je netriviální a proto zobrazení není prosté.

Stojí za povšimnutí, že na bázi B vůbec nezáleží. Změnou báze B se změní i matice ${}_{\mathrm{kan}}[f]_B$, ale její rozměr i hodnost zůstane stejná, a proto i rozhodnutí ohledně toho, jestli je zobrazení prosté či „na“. □

Ukázka 12.3 (Obraz a jádro lineárního zobrazení)**.** Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$
{}_{B_2}[f]_{B_1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},
$$

kde uvažované báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{P}^2$ jsou

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(1, 2, 1)^T,\ (0, 1, 1)^T,\ (1, 2, 4)^T\}, \\
B_2 &= \{x^2 - 2x + 3,\ x - 1,\ 2x^2 + x\}.
\end{aligned}
$$

Určete dimenzi obrazu a jádra f, a najděte jejich báze.

Řešení: Dimenze obrazu je rovna hodnosti matice zobrazení, tedy $\dim f(\mathbb{R}^3) = \mathrm{rank}(A) = 2$. Dimenzi jádra spočítáme ze vzorečku $\dim U = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim f(U)$, podle kterého $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - \mathrm{rank}(A) = 1$.

Abychom určili bázi obrazu, najdeme nejprve bázi sloupcového prostoru matice A; tu tvoří například první dva sloupce. Tyto dva vektory představují souřadnice hledané báze vzhledem k bázi B_2, takže stačí už jen vyjádřit odpovídající lineární kombinace

$$
\begin{aligned}
1(x^2 - 2x + 3) + 3(x - 1) + 0(2x^2 + x) &= x^2 + x, \\
1(x^2 - 2x + 3) + 2(x - 1) + 1(2x^2 + x) &= 3x^2 + x + 1,
\end{aligned}
$$

a bázi obrazu tvoří vektory x^2+x, $3x^2+x+1$. Zdůvodnění postupu je následující: Podle základní vlastnosti matice zobrazení je pro každé $x \in \mathbb{R}^3$

$$[f(x)]_{B_2} = {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot [x]_{B_1} = A \cdot [x]_{B_1}.$$

Tudíž souřadnice všech obrazů jsou ve sloupcovém prostoru matice A a naopak.

Podobně postupujeme při hledání báze jádra f. Nejprve najdeme bázi jádra matice A, což je jeden vektor $(2,-3,1)^T$. Tento vektor představuje souřadnice hledaného vektoru bázi vzhledem k bázi B_1, tedy odpovídající lineární kombinace

$$2(1,2,1)^T - 3(0,1,1)^T + 1(1,2,4)^T = (3,3,3)^T$$

nám dává vektor $(3,3,3)^T$ jakožto bázi jádra f. Zdůvodnění postupu je následující: Vektor $x \in \mathrm{Ker}(f)$ musí splňovat $f(x) = o$, tedy i $[f(x)]_{B_2} = o$. Podle základní vlastnosti matice zobrazení je

$$o = [f(x)]_{B_2} = {}_{B_2}[f]_{B_1} \cdot [x]_{B_1} = A \cdot [x]_{B_1}.$$

Tudíž souřadnice vektorů z jádra f jsou v jádru A a naopak. □

.... Cvičení ....

Isomorfismus

Cv. 12.1 Najděte isomorfismus mezi prostory:

(a) $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$,
(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,
(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$.

Cv. 12.2 Rozhodněte, zda jsou isomorfní:

(a) prostor $\mathbb{R}^2$ a prostor $\{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.
(b) prostor polynomů $\mathcal{P}$ a reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$.

Cv. 12.3 Buďte $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ isomorfismy. Dokažte, že $g \circ f$ je isomorfismus, speciálně:

(a) Jsou-li f, g prosté, pak $g \circ f$ je prosté.
(b) Jsou-li f, g na, pak $g \circ f$ je na.

Cv. 12.4 Dokažte, že isomorfismus v $\mathbb{R}^n$ zobrazuje přímky na přímky.

Cv. 12.5 Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus a $x_1, \ldots, x_n \in U$. Dokažte:

(a) Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.
(b) Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ generátory U, pak $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou generátory V.
(c) Jsou-li $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ lineárně nezávislé, pak i $x_1, \ldots, x_n$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 12.6 Ukažte, že pro daný vektorový prostor V množina všech isomorfismů $f\colon V \to V$ s operací skládání tvoří grupu.

Cv. 12.7 Ukažte, že lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je isomorfismus právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $g\colon V \to U$ takové, že $g \circ f$ a $f \circ g$ jsou identity. Navíc, g je isomorfismus a je jednoznačné.

Lineární zobrazení: obraz, jádro

Cv. 12.8 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ dané předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) 0,

(b) 123,

(c) x^2,

(d) $x^2 - 2x + 1$.

Cv. 12.9 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto A - A^T$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) 0,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 12.10 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to V$, že f je prosté resp. „na“?

Cv. 12.11 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ s předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ s předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a+b+c+d,\ a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(c) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathcal{P}^2$ s předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a+b)x^2 + (c+d)x + c$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ s předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a-b+c,\ b+c,\ a+2c,\ a-c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ s předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c)^T$,

(f) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ s předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+2c)^T$.

Cv. 12.12 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a uvažme lineární zobrazení $f(x) = Ax$. Co představuje $\mathrm{Ker}(f)$ a $f(\mathbb{R}^n)$?

Cv. 12.13 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^3$ dané předpisem $f\colon p(x) \to x \cdot p(x)$. Popište obraz $f(\mathcal{P}^2)$ a jádro $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Cv. 12.14 Co je obrazem prostoru $\mathrm{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x,\ \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x,\ \cos x\}$?

Cv. 12.15 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1)^T,\ f(0,1,1) = (-1,0)^T,\ f(1,1,0) = (1,0)^T.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \mathrm{Ker}\,(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Cv. 12.16 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = 2x^2 + 2x + 2,\ f(0,1,1) = 3x^2 + 4x + 1,\ f(1,1,0) = 2x^2 + x + 4.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \mathrm{Ker}\,(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\mathrm{Ker}\,(f)$.

Cv. 12.17 Najděte jádro a obraz lineárních zobrazení

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + x_3,\ 2x_1 + x_3)^T$,

(b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + x_4,\ x_2 - 2x_3,\ x_1 + 4x_3 + x_4)^T$,

Cv. 12.18 Najděte jádro a obraz lineárních zobrazení

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathcal{P}^2$ dané předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ax^2 + b + c + d$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathcal{P}^2$ dané předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a + c)x^2 + (a + c)x + (a + c)$.

Cv. 12.19 Uvažujme lineární zobrazení $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dané předpisem dole. Najděte jádro a obraz

(a) $f(x) \mapsto f(x) + f(-x)$,

(b) $f(x) \mapsto f(x) - f(-x)$,

Cv. 12.20 O lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je známo, že vektory $(1, 2, 0)^T$ a $(2, 0, 1)^T$ náleží do jádra a $f(1, 1, 1) = (3, 6)^T$.

(a) Zjistěte, zda je f určeno jednoznačně.

(b) Určete $\dim(f(\mathbb{R}^3))$.

(c) Najděte matici vzhledem ke kanonické bázi.

Cv. 12.21 Najděte jádro a obraz lineárního zobrazení $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto A + A^T$.

Cv. 12.22 Najděte jádro a obraz lineárního zobrazení $\mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$ představující druhou derivaci, $n \geq 2$.

Cv. 12.23 Uvažujme lineární zobrazení $x \mapsto Dx$, kde $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulární.

(a) Co je obrazem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n;\ a^T x = \beta\}$, kde $a \in \mathbb{R}^n$ a $\beta \in \mathbb{R}$?

(b) Co je obrazem množiny $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$?

(c) Co se zobrazí na množinu $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = b\}$?

(d) Jak se změní předchozí výsledky když D nebude regulární?

Cv. 12.24 Ukažte, že pro matice $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí: $\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB)$.

Cv. 12.25 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že $\{x \in U;\ f(x) \in W\}$ je podprostor U.

Cv. 12.26 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Dokažte, že existuje $W \Subset U$ takový, že $f(W) = f(U)$ a $W \cap \mathrm{Ker}(f) = \{o\}$.

Cv. 12.27 Dokažte, že lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je

(a) prosté právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $g\colon V \to U$ takové, že $g \circ f = id$ (na U).

(b) prosté právě tehdy, když když pro libovolná lineární zobrazení $h_1, h_2\colon W \to U$ s vlastností $f \circ h_1 = f \circ h_2$ platí $h_1 = h_2$.

(c) „na“ právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $g\colon V \to U$ takové, že $f \circ g = id$ (na V).

(d) „na“ právě tehdy, když pro libovolná lineární zobrazení $h_1, h_2\colon V \to W$ s vlastností $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ platí $h_1 = h_2$.

Duální prostory

Připomeňme, že je-li $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak duální báze je $f_1, \ldots, f_n \in V^*$, kde $f_i(v_i) = 1$ a $f_i(v_j) = 0$ pro $i \neq j$.

Cv. 12.28 Buď $v_1, \ldots, v_4$ báze prostoru V nad $\mathbb{R}$ a buď $f_1, \ldots, f_4$ duální báze. Najděte duální bázi pro bázi

(a) v_2, v_1, v_4, v_3,

(b) $v_1, 2v_2, \frac{1}{2}v_3, v_4$,

(c) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$,

Cv. 12.29 Buď $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ báze prostoru V a $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ duální báze duálního prostoru V^*. Ukažte, že pro každé $v \in V$ a $f \in V^*$ je

$$[f]_{B^*} = (f(v_1), \ldots, f(v_n))^T,$$
$$[v]_B = (f_1(v), \ldots, f_n(v))^T.$$

*Cv. 12.30 Ukažte, že pro bázi $B^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ duálního prostoru V^* existuje právě jedna báze $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ prostoru V taková, že B^* je duální k B.

Cv. 12.31 Buď $g\colon V \to V$ lineární zobrazení na prostoru V a definujme duální zobrazení g^* na duálním prostoru V^* předpisem $(g^*(f))(v) = f(g(v))$. Ukažte, že g^* je lineární zobrazení na V^*.

Cv. 12.32 Buď A matice lineárního zobrazení $g\colon V \to V$ vzhledem k bázi B. Ukažte, že A^T je matice duálního lineárního zobrazení g^* vzhledem k duální bázi B^*.

Cv. 12.33 Zobecněte cv. 12.31 a cv. 12.32 na případ lineárního zobrazení $g\colon U \to V$.

Cv. 12.34 Buď $g\colon V \to V$ lineární zobrazení na prostoru V. Ukažte, že g je isomorfismus právě tehdy, když duální zobrazení g^* je isomorfismus na duálním prostoru V^*.

13 Afinní podprostory, polynomy, ...

Ukázka 13.1 (Afinní nezávislost)**.** Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T,\ x_1 = (2, 3, 1)^T,\ x_2 = (1, 3, 2)^T,\ x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení: Spočítáme si vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T,\ x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T,\ x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé (geometricky leží v jedné rovině). □

Cvičení

Afinní podprostory

Cv. 13.1 Ukažte, že množina řešení reálné soustavy $Ax = b$ je afinní, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 13.2 Nechť množina řešení $Ax = b$ je 2-dimenzionální afinní podprostor. Co můžeme říct o množině řešení $Ax = b'$? Najděte příklady ilustrující tu kterou situaci.

Cv. 13.3 Buď $M = V + a$ afinní podprostor. Dokažte, že prostor V je dán jednoznačně.

Cv. 13.4 Buď M afinní podprostor ve V. Ukažte, že $M - M = \{u - v;\ u, v \in M\}$ je vektorový podprostor ve V.

Cv. 13.5 Určete dimenzi afinního podprostoru generovaného vektory $(1, 2)^T$, $(2, 1)^T$, $(0, 3)^T$.

Cv. 13.6 Rozhodněte, zda vektory $(1, 0, 2)^T$, $(2, 2, 1)^T$, $(2, 1, 3)^T$, $(3, 3, 2)^T$ leží v jedné rovině.

Cv. 13.7 Dokažte, že vektory $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $(x_1, 1), \ldots, (x_n, 1)$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 13.8 Dokažte:

(a) $U + a = U + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$,

(b) $U + a = V + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$ a $U = V$.

Cv. 13.9 Buď $S = \{a, v_1, \ldots, v_n\}$ souřadný systém reálného afinního podprostoru $M = a + V$, a označme $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dokažte:

(a) Pro každé $u, v \in M$ je $[u - v]_B = [u]_S - [v]_S$.

(b) Pro každé $u \in M$ a každé $v \in V$ je $[u + v]_S = [u]_S + [v]_B$.

Cv. 13.10 Ukažte, že afinní podprostory $U + a$ a $U + b$ jsou buďto shodné, nebo disjunktní.

Cv. 13.11 Ukažte, že průnik afinních podprostorů je zase afinní podprostor nebo prázdná množina.

Cv. 13.12 Buďte $U + a$, $W + b$ rovnoběžné. Ukažte, že pak jsou disjunktní právě tehdy když $a - b \notin U \cup W$.

Cv. 13.13 Buďte $U + a$, $W + b$ nerovnoběžné. Ukažte, že pak jsou různoběžné právě tehdy když $a - b \in U + W$.

Cv. 13.14 Ukažte, že dvě přímky $a + \mathrm{span}\{u\}$, $b + \mathrm{span}\{v\}$ jsou mimoběžné právě tehdy, když vektory $a - b, u, v$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 13.15 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $W + a$ afinní podprostor U. Ukažte, že jeho obraz je afinní podprostor V a najděte jeho popis.

Cv. 13.16 (Analogie vět o isomorfismu vektorových prostorů.) Ukažte, že afinní prostory $U+a$, $W+b$ mají stejnou dimenzi právě tehdy, když existuje prosté afinní zobrazení $U + a$ na $W + b$.

Cv. 13.17 Najděte úplný vzor pro následující situace

(a) $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$,

(b) $f^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $f^{-1}(1, 1, -2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané $f(a, b, c) = (a - b,\ b - c,\ c - a)^T$,

(d) $f^{-1}(x + 1)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ representující derivaci.

Cv. 13.18 Dokažte:

(a) Obraz prostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.

(b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

(c) Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) := \{u \in U;\ f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U.

Cv. 13.19 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = (0, 1)^T + \mathrm{span}\{(1, 0)^T\}$ a g představuje překlopení podle přímky $q = \{x \in \mathbb{R}^2;\ -x_1 + x_2 = 1\}$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 13.20 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \mathrm{span}\{(1, 2)^T\} + (1, 1)^T$, $N = \mathrm{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T$,

(b) $M = \mathrm{span}\{(1, 2, 1)^T,\ (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T$, $N = \mathrm{span}\{(0, 3, 2)^T,\ (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T$.

Cv. 13.21 Buď U podprostor V. Ukažte, že V se dá vyjádřit jako disjunktní sjednocení afinních podprostorů určených posunutým podprostorem U. Dokážete toto sjednocení vyjádřit explicitně?

Cv. 13.22 Buď U podprostor V. Na afinních podprostorech V zadefinujme operace sčítání a násobení skalárem takto:

$$(U + a) + (U + b) = U + (a + b), \quad \alpha(U + a) = U + \alpha a.$$

(a) Ukažte, že množina všech afinních podprostorů $V/U = \{U + a;\ a \in V\}$, určených posunutým podprostorem U, tvoří se zvýše zmíněnými operacemi vektorový prostor.

(b) Určete dimenzi V/U.

(c) Kdy je W/Z podprostorem V/U?

(d) Uvažujme zobrazení $f\colon V \to V/U$ definované $f(a) = U + a$. Ukažte, že f je lineární zobrazení a určete jeho jádro a obraz.

(e) Buď $U \Subset W \Subset V$. Dokažte, že $(V/U)/(W/U)$ je isomorfní s V/W.
Je $(V/U)/(V/W)$ je isomorfní s W/U?

(f) Buď $U, W \Subset V$. Dokažte, že $U/(U \cap W)$ je isomorfní s $(U + W)/W$.

Polynomy

Cv. 13.23 Dokažte: je-li z kořenem reálného polynomu $p(x)$ právě tehdy když $(x-z)$ dělí $p(x)$, tj. $p(x)$ se dá vyjádřit $p(x) = (x-z)q(x)$, kde $q(x)$ je polynom nižšího stupně.

Cv. 13.24 Určete násobnost kořene 1 v polynomu $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ a dopočítejte zbývající kořeny.

Cv. 13.25 Najděte kořeny následujících polynomů a rozložte polynomy na kořenové činitele:

(a) $x^4 + 1$,

(b) $x^3 + 8$,

(c) $x^5 + x^4 - 12x^3 + 32x^2 - 36x + 20$, (zde prozradíme, že $1 + i$ je jeho dvojnásobným kořenem).

Cv. 13.26 Najděte následující polynomů a rozložte polynomy na kořenové činitele:

(a) $x^4 + 1$,

(b) $x^3 + 8$.

Cv. 13.27 Dokažte: $p(x)$ je reálný polynom s kořenem $z \in \mathbb{C}$, pak i $\overline{z}$ je kořenem $p(x)$.

Cv. 13.28 Ukažte, že dělení dvou polynomů se zbytkem je jednoznačné.

Cv. 13.29 Ukažte, že polynomy $p(x)$, $q(x)$ stupňů m, n mají společný kořen právě tehdy, když existují polynomy $r(x)$, $s(x)$ stupňů nanejvýš $n-1, m-1$ takové, že $r(x)p(x) + s(x)q(x) = 0$.

14 Softwarové příklady

Ukázka 14.1 (Práce v Matlabu či Octave)**.** Představíme základní příkazy pro práci s maticemi v prostředí Matlabu či Octave.

Zadání konkrétní matice A:

```
>> A=[1 2 3;4 5 6]
A~=
   1   2   3
   4   5   6
```

Výpočet hodnosti matice A:

```
>> rank(A)
ans =  2
```

Výpočet redukovaného odstupňovaného tvaru matice A:

```
>> rref(A)
ans =
   1   0  -1
   0   1   2
```

Zadání náhodné matice B řádu 2×3 s prvky v intervalu $[0, 1]$:

```
>> B=rand(2,3)
B =
   0.51809   0.42796   0.21070
   0.73549   0.16448   0.82178
```

Zadání náhodné matice C řádu 2×3 s prvky v $\{0, 1\}$:

```
>> C=round(rand(2,3))
C =
   0   1   1
   0   1   0
```

Součet dvou matic $A + C$:

```
>> A+C
ans =
   1   3   4
   4   6   6
```

Součin dvou matic AC^T:

```
>> A*C'
ans =
    5    2
   11    5
```

Vytvoření blokové matice $\binom{A}{C}$:

```
>> [A;C]
ans =
   1   2   3
   4   5   6
   0   1   1
   0   1   0
```

Výběr prvku a_{23} matice A:

```
>> A(2,3)
ans =  6
```

Výběr prvních dvou sloupců matice A do nové matice D:

```
>> D=A(:,1:2)
D =
   1   2
   4   5
```

Inverze matice D:

```
>> inv(D)
ans =
  -1.66667   0.66667
   1.33333  -0.33333
```

Řešení soustavy $Dx = \binom{1}{7}$:

```
>> D \ [1;7]
ans =
   3.0000
  -1.0000
```

Báze jádra matice A:

```
>> null(A)
ans =
   0.40825
  -0.81650
   0.40825
```

□

Cvičení

Cv. 14.1 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$. Navrhněte co nejefektivnější způsob výpočtu $A^k b$. Pro jednoduchost měřme efektivitu počtem součinů reálných čísel.

Konkrétně, kolik operací musíme vykonat když $k = 1024$ a $n = 3000$?

Vyzkoušejte si různé způsoby numericky a porovnejte reálný výpočetní čas. Prvky matice A a vektoru b volte náhodně v intervalu $[-\frac{1}{30}, \frac{1}{30}]$.

Cv. 14.2 Buď H Hilbertova matice řádu 15, tj. její prvky jsou $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Dále buď b vektor vzniklý součtem sloupců matice H.

(a) Numericky spočítejte řešení soustavy $Hx = b$ a porovnejte ho se skutečným. K výpočtu používejte výhradně Gaussovu–Jordanovu eliminaci, a žádnou jinou sofistikovanější methodu.

(b) Alternativně, spočítejte přibližné řešení pomocí iterací

$$x := b; \quad A := I - H;$$
$$\texttt{for } i = 1 : 1000 \texttt{ do } x := Ax + b;$$

Důvod za těmito iteracemi spočívá ve vzorci $H^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$, který platí pro určitou třídu matic, zahrnující i Hilbertovu.

(c) Porovnejte obě metody co do přesnosti řešení a výpočetního času.

15 Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování

V této sekci uvádíme rekapitulační úlohy pro předešlé sekce 2–13.

Cv. 15.1 Karel měl na fyzikálních praktikách za úkol měřit závislost výšky hozeného míčku na čase. Vybral si k tomu vysokou budovu, z jejíž střechy hodil míček (vícekrát mu to kvůli bezpečnosti chodců nedovolili) a jeho kamarád Jenda měřil v jednotlivých časových úsecích výšku nad zemí. V čase $0\,s$, $1\,s$, $2\,s$, $3\,s$, $4\,s$ mu vyšla výška $99\,m$, $110\,m$, $93\,m$, $60\,m$, a $7\,m$. Jednou ale udělal chybu. Objevíte kdy?

Cv. 15.2 Uvažujme následující způsob šifrování textových zpráv. Každému písmenu A až Z přiřadíme postupně čísla 1 až 26

A → 1	H → 8	O → 15	V → 22
B → 2	I → 9	P → 16	W → 23
C → 3	J → 10	Q → 17	X → 24
D → 4	K → 11	R → 18	Y → 25
E → 5	L → 12	S → 19	Z → 26
F → 6	M → 13	T → 20	
G → 7	N → 14	U → 21	

Tím pádem místo vstupního textu máme posloupnost čísel. Nyní rozdělíme posloupnost do n-tic. Každá n-tice odpovídá vektoru $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Šifrování probíhá potom tak, že vektor přenásobíme předem danou maticí $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Tedy každá n-tice v se zašifruje na n-tici Av. Zašifrovanou posloupnost čísel pošleme a příjemce dešifruje zprávu jednoduše tak, že rozdělí posloupnost čísel do n-tic a každou n-tici w vynásobí maticí A^{-1} a dostane $A^{-1}w$. Z tabulky pak přeloží čísla zpět na znaky.

Konkrétně, dešifrujte posloupnost čísel

$$15,\ 29,\ 49,\ 80,\ 9,\ 14,\ 15,\ 29,\ 30,\ 55,\ 15,\ 29,\ 38,\ 67,\ 53,\ 85,$$

za předpokladu, že $n = 2$ a podařilo se vám odhalit, že slovo „PIVO“ se zašifruje jako 34, 59, 52, 89.

Cv. 15.3 Pět pirátů uložilo nahromaděný lup do trezoru Banky de Tortuga. Trojčíselné heslo si nechali zajatým matematikem zakódovat do řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 30 \end{array}\right)$$

tak, aby žádní dva piráti se nemohli dostat k lupu, ale libovolná trojice už ano. Odvedl matematik požadovanou práci?

Najdete podobnou šifru pro 6 pirátů?

Cv. 15.4 Máme třináct mincí a víme, že každá množina dvanácti z nich lze rozdělit na dvě šestice tak, že součet hodnot obou částí je stejný. Ukažte, že všechny mince mají stejnou hodnotu. (*Hint:* Sestavte vhodnou soustavu a dle cv. 4.6 nahlédněte, že matice má hodnost 12.)

Cv. 15.5 Nechť obdélník o stranách $a, b \in \mathbb{R}$ je rozdělený na čtverce o stranách $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\frac{x_i}{a}, \frac{x_i}{b} \in \mathbb{Q}$ pro všechna i.

Cv. 15.6 Uvažujme šachovnici $n \times n$ náhodně obarvenou černými a bílými políčky. Přípustný tah je změnit barvu vybraného políčka a jeho čtyř sousedů. Vymyslete postup jak pomocí sekvence tahů dospět k bílé šachovnici nebo rozhodnout, že to není možné.

Cv. 15.7 Dokažte, že soustava $Ax = b$ má řešení právě tehdy když $A^T y = 0,\ b^T y = 1$ nemá řešení.

Cv. 15.8 Matfyzácká knihovna obsahuje n knih a navštěvuje ji $n+1$ studentů. Každý z nich má půjčenu aspoň jednu knihu. Ukažte, že existují dvě disjunktní množiny studentů, které obě mají půjčený celkem stejný soubor knih.

Cv. 15.9 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a definujme dvě množiny matic:

$$C = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n};\ AB = BA\},$$
$$P = \{a_k A^k + \ldots + a_1 A + a_0 I_n;\ k \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Ukažte, že C, P jsou podprostory $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Ukažte, že $P \subseteq C$.

(c) Najděte co největší třídu matic z C.

Cv. 15.10 Buď $x_1, \ldots, x_n$ báze $\mathbb{R}^n$ a buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte, že $A = B$ právě tehdy, když $x_i^T A x_j = x_i^T B x_j$ pro všechna i, j.

Cv. 15.11 Popište všechny matice A takové, že A i A^{-1} obsahují pouze nezáporná čísla.

Cv. 15.12 Uvažujme blokovou soustavu $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Upravte matici do blokově odstupňovaného tvaru. Jak vypadá matice representující tuto úpravu?

(b) Jak byste nyní vypočítali řešení x, y?

Cv. 15.13 Najděte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \ldots + \lambda_n &= 0, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_n^n &= 0. \end{aligned}$$

(*Hint:* Vandermondova matice a uvažujte navzájem různá řešení nejprve.)

Cv. 15.14 Nechť vektory $v_1, \ldots, v_n$ generují prostor $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že matice $\sum_{i=1}^n v_i v_i^T$ je regulární.

Cv. 15.15 Dokažte, že hodnost matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ se dá ekvivalentně definovat jako:

(a) velikost největší regulární podmatice (podmatice vznikne odstraněním určitého počtu, i nulového, řádků a sloupců).

(b) nejmenší z rozměrů matic B, C ze všech možných rozkladů $A = BC$.

Cv. 15.16 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r. Navrhněte postup, jak najít $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ takové, že $A = BC$. Proč musí mít matice B lineárně nezávislé sloupce a matice C řádky?

Cv. 15.17

(a) Jak moc jde „zjednodušit“ matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ jsou-li povoleny nejenom elementární řádkové, ale i sloupcové úpravy?

(b) Buďte $A, B \in \mathbb{T}^{m\times n}$. Dokažte, že $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ právě tehdy, když existují regulární $S \in \mathbb{T}^{m\times m}$ a $R \in \mathbb{T}^{n\times n}$ tak, že $A = SBR$.
Hint: Ukažte, že vlastnost $A = SBR$ matic A, B je relace ekvivalence a zkuste najít vhodného reprezentanta tříd ekvivalence.

*(c) Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$. Ukažte, že maticová soustava $A = BXC$ je řešitelná právě tehdy, když jsou řešitelné soustavy $A = BY$ a $A = ZC$ (pro neznámé matice Y, Z). *Hint:* Použijte řešení cv. (a).

Cv. 15.18 Ukažte, že matice $A \in \mathbb{T}^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$ pro každou matici $B \in \mathbb{T}^{n\times n}$. (A analogicky pro násobení zleva.)

Cv. 15.19 Nechť matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ má lineárně nezávislé řádky. Ukažte, že existuje matice $B \in \mathbb{T}^{n\times m}$ taková, že $AB = I_m$ (matice B je tzv. pravou inverzí k A).

Cv. 15.20 Ukažte, že pro matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ hodnosti r lze najít vektory $x_1, \dots, x_r \in \mathcal{S}(A)$ a $y_1, \dots, y_r \in \mathcal{R}(A)$ tak, že $A = x_1 y_1^T + \ldots + x_r y_r^T$. (Srov. cv. 3.27)

Navíc, vektory $x_1, \dots, x_r$ lze volit přímo jako vhodné sloupce A, nebo vektory $y_1, \dots, y_r$ jako řádky A, ale ne zároveň.

Cv. 15.21 Matice incidence $I_G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ orientovaného grafu $G = (V, E)$ s $|V| = n$ vrcholy a $|E| = m$ hranami je definována jako $(I_G)_{ie} = 1$ pokud $e = (i, j) \in E$, $(I_G)_{ie} = -1$ pokud $e = (j, i) \in E$ a $(I_G)_{ie} = 0$ jinak ($i \notin e$).

(a) Určete hodnost I_G. (*Hint:* Začněte se stromem, pak zobecněte na souvislý graf a nakonec uvažujte obecný graf.)

(b) Najděte jádro I_G.

Cv. 15.22 Matice sousednosti $A_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ neorientovaného grafu $G = (V, E)$ s $|V| = n$ vrcholy a $|E| = m$ hranami je definována jako $(A_G)_{ij} = 1$ pokud $\{i, j\} \in E$ a $(A_G)_{ij} = 0$ jinak.

(a) Interpretujte prvky v maticích $(A_G)^k$ a $(I_n + A_G)^k$ pro přirozené k.

(b) Určete jak souvisí prvky matic $(I_n + A_G)^{n-1}$ a $(A_G)^{n-2} + (A_G)^{n-1}$ se souvislostí grafu G, tj., zda každé dva vrcholy grafu jsou spojeny posloupností na sebe navazujících hran.

(c) Ukažte, že matice sousednosti cesty liché délky je singulární.

Cv. 15.23 Dokažte, že prostor W je direktním součtem podprostorů U, V (tj., $U \cap V = \{o\}$ a $U + V = W$) právě tehdy, když každý vektor $w \in W$ lze jediným způsobem vyjádřit jako součet $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 15.24 Vymyslete alternativní důkaz identity $\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$ pro $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ s využitím RREF tvaru matice A.

Cv. 15.25 Určete počet regulárních matic řádu n nad tělesem $\mathbb{T}$ velikosti p (srov. cv. 5.22).

Cv. 15.26 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.

(a) Určete počet vektorů V.

(b) Určete počet bází V.

(c) Určete počet isomorfismů $f \colon V \to V$.

(d) Určete počet k-dimenzionálních podprostorů ve V.

Cv. 15.27 Cirkulant řádu n je libovolná matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tvaru $a_{ij} = p_{i-j \bmod n}$, kde $p_0, \dots, p_{n-1}$ jsou nějaká reálná čísla. Dokažte, že cirkulanty řádu n tvoří vektorový prostor, najděte jeho bázi a dimenzi.

Cv. 15.28 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a zaveďme množinu uspořádaných dvojic vektorů $V^2 := \{(u, v);\ u, v \in V\}$. Na V_2 dále zaveďme operace

(a) Ukažte, že V^2 je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ s operacemi

- sčítání: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$,
- násobení komplexním skalárem $a + bi \in \mathbb{C}$: $(a + bi) \cdot (u, v) = (au - bv, bu + av)$.

(b) Určete dimenzi V^2.

(c) Buďte V, W vektorové prostory nad $\mathbb{R}$ a buď $f\colon V \to W$ lineární zobrazení. Ukažte, že zobrazení $f'\colon V^2 \to W^2$ definované předpisem $f'(u,v) = (f(u), f(v))$ je lineární. Dále ukažte, že $\mathrm{Ker}(f') = \mathrm{Ker}(f)^2$.

Cv. 15.29 Mějme lineární zobrazení $x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) x$. Kam se zobrazí přímka $2x - y = 5$? Lze využít obraz normály přímky?

Cv. 15.30 Buď $v \in \mathbb{R}^n$ dané a uvažme zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s předpisem $f(x) = vx^T v$.

(a) Ukažte, že f je lineární.

(b) Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi.

(c) Určete jádro a obraz f.

(d) Najděte bázi B tak, aby ${}_B[f]_B$ obsahovala co nejvíce nul.

Cv. 15.31 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Rozložte lineární zobrazení $f\colon x \mapsto Ax$ na $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kde f_1, f_2, f_3 transformují pouze dvoudimenzionální podprostor $\mathbb{R}^3$.

Cv. 15.32 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ idempotentní, tj. $A^2 = A$, buď $x_1, \ldots, x_k$ báze $\mathcal{S}(A)$ a $x_{k+1}, \ldots, x_n$ báze $\mathrm{Ker}(A)$. Pro lineární zobrazení $f(x) = Ax$ a bázi $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$

(a) najděte matici f vzhledem k bázi B,

(b) dokažte, že $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{trace}(A)$.

Cv. 15.33 Buď V vektorový prostor a L množina všech isomorfismů $f\colon V \to V$. Rozhodněte, zda L je těleso s operací sčítání a skládání.

Cv. 15.34 (a) Ukažte, že $\mathrm{GF}(2^n)$ je nad $\mathbb{Z}_2$ vektorový prostor.

(b) Ukažte, že $\mathrm{GF}(2^n)$ nad $\mathbb{Z}_2$ je isomorfní s $\mathbb{Z}_2^n$ nad $\mathbb{Z}_2$.

Cv. 15.35 Co by se stalo, kdybychom z definice vektorového prostoru vypustili podmínku $1 \cdot v = v$?

Cv. 15.36 Buď $EA = R$, kde E je regulární a R je RREF tvar matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti r. Ukažte, že posledních $m - r$ řádků matice E tvoří bázi $\mathrm{Ker}(A^T)$.

Cv. 15.37 *LU rozklad* je rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na součin $A = LU$, kde $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ horní trojúhelníková matice. Buď A_i levá horní podmatice A velikosti i (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n - i$ řádků a sloupců).

(a) Ukažte, že LU rozklad existuje pokud matice $A_1, \ldots, A_n$ jsou regulární.

(b) Ukažte, že regulární matice A nemůže mít LU rozklad pokud nějaké A_i je singulární.

(c) Ukažte, že LU rozklad existuje právě tehdy, když matice $A_1, \ldots, A_n$ jsou regulární.

(d) Buď A regulární. Ukažte, že existuje permutační matice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $(PA)_i$ jsou regulární pro všechna $i = 1, \ldots, n$. (*Hint:* Matematická indukce.)

(e) Buď A regulární. Ukažte, že existuje permutační matice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že PA má LU rozklad.

(f) Najděte LU rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(g) Najděte LU rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

(h) Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ nemá LU rozklad.

(i) Dokážete sestrojit UL rozklad (součin horní a dolní trojúhelníkové matice) matice A?

Část II

Od skalárního součinu, přes vlastní čísla a kvadratické formy k rozkladům

16 Skalární součin, norma

Obecný skalární součin:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$, a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in V$,
3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in V$.

Norma indukovaná skalárním součinem:

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Ukázka 16.1 (Nestandardní skalární součin)**.** Ověřte, že

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

definuje reálný skalární součin na $\mathbb{R}^2$ a pro $x = (1, 2)^T$, $y = (3, 4)^T$ spočítejte

(a) $\langle x, y\rangle$,

(b) $\|x\|$,

(c) vzdálenost x od y,

Řešení: Ověříme axiomy z definice skalárního součinu:

1. $\langle x, x\rangle = 2x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + 2x_2x_2 = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, a rovnost nastane pouze když $x_1 = x_2 = 0$.
2. $\langle x + z, y\rangle = 2(x_1 + z_1)y_1 - (x_1 + z_1)y_2 - (x_2 + z_2)y_1 + 2(x_2 + z_2)y_2 = (2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) + (2z_1y_1 - z_1y_2 - z_2y_1 + 2z_2y_2) = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$,
3. $\langle \alpha x, y\rangle = 2\alpha x_1y_1 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 = \alpha(2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) = \alpha\langle x, y\rangle$,
4. $\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 = 2y_1x_1 - y_1x_2 - y_2x_1 + 2y_2x_2 = \langle y, x\rangle$.

Poznamenejme, že ověření první vlastnosti nemusí být vždy tak snadné jako v tomto případě. Obecný postup si ukážeme později (sekce 27). Nyní stačí dosadit do předpisu skalárního součinu a spočítat požadované hodnoty:

(a) $\langle x, y\rangle = 12$,

(b) $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{6}$,

(c) vzdálenost x od y je dána $\|x - y\| = \sqrt{8}$. □

Cauchyho–Schwarzova nerovnost:

Obecně: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Speciálně v $\mathbb{R}^n$: $|\sum_{i=1}^n x_iy_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

Ukázka 16.2 (Cauchyho–Schwarzova nerovnost)**.** Dokažte, že pro libovolná čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right) \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}.$$

Řešení: Nabízí se použít Cauchyho–Schwarzovu nerovnost. Pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ má tato nerovnost tvar $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$, neboli rozepsaně

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

Abychom dostali požadovanou nerovnost, nabízí se zde zase volit za vektor u konkrétně $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{1}{\sqrt{6}}z)^T$, z čehož pak vychází i volba $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})^T$. Po dosazení skutečně dostáváme požadovanou nerovnost. □

Obecná norma:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$, a rovnost nastane pouze pro $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$.

Ukázka 16.3 (Ekvivalence norem)**.** Různé normy se nemohou lišit až tak moc, jak bychom předpokládali – hodnoty vektorů v různých normách jsou určitým způsobem ohraničeny. Konkrétně, pro normy

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|,\\ \|x\|_2 &= \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2},\\ \|x\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\end{aligned}$$

prostoru $\mathbb{R}^n$ ukažte, že platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 &\leq n\|x\|_\infty,\\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 &\leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,\\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 &\leq \sqrt{n}\|x\|_2.\end{aligned}$$

Řešení: Pro ilustraci ukážeme první dvě nerovnosti. Nerovnost $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ plyne díky

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \leq \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1.$$

Nerovnost $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ plyne díky

$$\|x\|_1 = \textstyle\sum_{j=1}^n |x_j| \leq \sum_{j=1}^n \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = \sum_{j=1}^n \|x\|_\infty = n\|x\|_\infty.$$ □

Cvičení

Standardní skalární součin

Cv. 16.1 Komplexní čísla.

(a) Připomeňte si definici komplexních čísel, absolutní hodnotu komplexního čísla a komplexní rovinu.

(b) Připomeňte si aritmetické operace. Spočítejte

$$(3-4i)+(1+2i), \quad (3-4i)\cdot(1+2i), \quad (3-4i)^2, \quad \frac{3-4i}{1+2i}, \quad |3-4i|.$$

(c) Připomeňte si komplexně sdružené číslo $\overline{u}$ ke komplexnímu číslu $u = a + bi$. Rozhodněte, zda platí

$$\overline{\overline{u}} = u, \quad \overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}, \quad \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}.$$

Cv. 16.2 Připomeňte si standardní skalární součin nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$, vztah skalárního součinu a úhlu mezi vektory, a eukleidovskou normu vektoru.

Cv. 16.3 Spočítejte:

(a) $\langle x, y\rangle$,

(b) jsou x, y na sebe kolmé?

(c) $\|x\|$, $\|y\|$,

(d) vzdálenost x od y,

pro

(a) $x = (2, 1, 4, -1)^T$, $y = (4, -1, 0, 2)^T$,

(b) $x = (1, 2, 1, -2i)^T$, $y = (i, 2i, i-1, 2)^T$.

Cv. 16.4 Určete úhel mezi:

(a) vektory $x = (0, 0, 1)^T$ a $y = (1, 0, -1)^T$.

(b) hlavní diagonálou krychle a její podstavou.

Cv. 16.5 Najděte všechny vektory jednotkové délky kolmé na $(3, -2)^T$.

Cv. 16.6 Popište množinu všech bodů, které jsou stejně vzdáleny od bodu $(1, 2)^T$ jako od bodu $(-1, 0)^T$. Jak tato množina vypadá?

Cv. 16.7 Najděte co nejvíce lineárně nezávislých vektorů kolmých na vektor

(a) $x = (1, 2, 3)^T$,

(b) $y = (1, 2, 3, 4)^T$.

Cv. 16.8 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte nenulový vektor v (příp. všechny), který je kolmý na

(a) všechny řádky matice A,

(b) všechny vektory z $\mathcal{R}(A)$,

(c) všechny vektory z $\mathcal{S}(A)$.

Cv. 16.9 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Ukažte, že pro $i \neq j$ je i-tý řádek matice A kolmý na j-tý sloupec matice A^{-1}.

Cv. 16.10 Jaké jsou vlastnosti kolmosti jako relace? (reflexivita, symetrie, transitivita, ...)

Cv. 16.11 Je skalární součin lineární zobrazení?

Cv. 16.12 Vyjmenuje základní vlastnosti skalárního součinu.

Cv. 16.13 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon x \to Ax$ s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a buď $x = (1,2,1)^T$. Najděte vektor $y \in \mathbb{R}^3$ takový, aby $x \perp y$ a $f(x) \perp f(y)$.

Obecný skalární součin

Cv. 16.14 Proč požadujeme ve 4. vlastnosti $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, a ne $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$?

Cv. 16.15 Ukažte, že:

(a) $\langle x,y\rangle = x^T y$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$,
(b) $\langle x,y\rangle = x^T \overline{y}$ je skalární součin na $\mathbb{C}^n$,
(c) $\langle x,y\rangle = x^T y$ není skalární součin na $\mathbb{C}^n$.

Cv. 16.16 Rozhodněte, zda následující je skalární součin v $\mathbb{R}^2$

(a) $\langle x,y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$,
(b) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$,
(c) $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Cv. 16.17 Buď $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonální. Za jakých podmínek je $\langle x,y\rangle = x^T D y$ reálným skalárním součinem?

Cv. 16.18 Definujte reálný skalární součin (pokud to jde) pro prostory:

(a) $\mathbb{C}^n$ nad tělesem $\mathbb{R}$.
(b) $\mathbb{Z}_2^n$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$.

Cv. 16.19 Dokažte, že nad $\mathbb{R}$ je $x - y \perp x + y$ právě tehdy když $\|x\| = \|y\|$.
Jak je to nad $\mathbb{C}$?

Cv. 16.20 Nad $\mathbb{R}$ dokažte obě implikace Pythagorovy věty, tj. $x \perp y$ právě tehdy když $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
Najděte protipříklad nad $\mathbb{C}$, kdy Pythagorova věta neplatí obráceně, tj. x, y nejsou kolmé a přesto $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Cv. 16.21 Dokažte tzv. polarizační identity:

(a) $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (nad $\mathbb{R}$),
(b) $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (nad $\mathbb{R}$),
(c) $\mathsf{Re}\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (nad $\mathbb{C}$),
(d) $\mathsf{Im}\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$ (nad $\mathbb{C}$),

Cv. 16.22 Jsou-li vektory $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^n$ ortogonální ve standardním skalárním součinu, pak matice $I - q_1q_1^T, \ldots, I - q_nq_n^T$ navzájem komutují. Dokažte.

Cv. 16.23 Buď $u, v \in \mathbb{R}^n$ a $A = uv^T$. Najděte nutnou a postačující podmínku pro $A^2 = 0$.

Cv. 16.24 Pro skalární součin

$$\langle x, y\rangle = 5x_1y_1 + x_2y_2 + 11x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

spočítejte:

(a) $\langle x, y\rangle$,
(b) jsou x, y na sebe kolmé?
(c) $\|x\|$, $\|y\|$,
(d) vzdálenost x od y,

pro

(a) $x = (2, 2, 1)^T$, $y = (1, 1, -1)^T$,
(b) $x = (2, 1, 1)^T$, $y = (1, 0, -1)^T$.

Cv. 16.25 Dokažte, že pro $x, y \in V$ existuje $\alpha \in \mathbb{C}$ a $z \in V$ tak, že $y = \alpha x + z$ a $z \perp x$.

Cv. 16.26 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ a B nějaká jeho báze.

(a) Ukažte, že
$$\langle x, y\rangle := [x]_B^T [y]_B$$
definuje skalární součin.
(b) Najděte explicitní vyjádření $\langle x, y\rangle$ pro bázi $B = \{(1, 1)^T, (1, -1)^T\}$.

Cv. 16.27 Zaveďte v prostoru $\mathbb{R}^2$ skalární součin tak, aby $u \perp v$ pro

(a) $u = (1, 2)^T$ a $v = (2, 3)^T$.
(b) $u = (-5, 2)^T$ a $v = (10, -4)^T$.

Cv. 16.28 Buď V prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$ a buďte $x_1, \ldots, x_m \in V$ takové, že $\langle x_i, x_j\rangle < 0$ pro $i \neq j$.

(a) Nechť $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = o$ pro $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukažte, že všechna α_i mají stejná znaménka.
(b) Je-li $m = n + 1$, pak každá n-tice vektorů z $x_1, \ldots, x_m$ tvoří bázi V.
(c) Ukažte, že $m \leq n + 1$.

Cauchyho–Schwarzova nerovnost

Cv. 16.29 Dokažte, že pro každé $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ platí: $5a_1 + a_2 + 3a_3 + a_4 \leq 6\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$.

Cv. 16.30 Dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem, tj. pro každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Cv. 16.31 Dokažte, že pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí: $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$.

Cv. 16.32 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí: $n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)(a_1^{-1} + \ldots + a_n^{-1})$.

Cv. 16.33 Dokažte, že pro každé $a_1, \ldots, a_n > 0$ platí: $a_1 + \ldots + a_n \leq a_1^2/a_2 + a_2^2/a_3 + \ldots + a_n^2/a_1$.

Cv. 16.34 Dokažte, že pro každé $p, r, s, t \in \mathbb{R}$ platí:

$$(1 + prst)^4 \leq (1 + p^4)(1 + r^4)(1 + s^4)(1 + t^4).$$

Cv. 16.35 Dokažte, že pro každé $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Cv. 16.36 Dokažte $|\langle x, y\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Cv. 16.37 Připomeňme, že $\operatorname{trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Ukažte, že platí $\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}(BA)$ pro všechny $A, B^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Proč to není skalární součin?
V $\mathbb{R}^{m\times n}$ uvažujme skalární součin $\langle A, B\rangle := \operatorname{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. Proveďte/dokažte:

(a) Ověřte, že jde o skalární součin. Speciálně, že platí $\operatorname{trace}(A^T B) = \operatorname{trace}(B^T A)$.
(b) Zformulujete Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
(c) $\operatorname{trace}(A)^2 \leq n \operatorname{trace}(A^T A)$,
(d) $\operatorname{trace}(A^2) \leq \operatorname{trace}(A^T A)$,
(e) $\operatorname{trace}(A^T B) \leq \frac{1}{2}(\operatorname{trace}(A^T A) + \operatorname{trace}(B^T B))$.

Norma

Cv. 16.38 Pro různé druhy norem na $\mathbb{R}^2$ si nakreslete jednotkovou kružnici $\{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| = 1\}$.

Cv. 16.39 Ověřte, že $\|x\| := |x_1 - x_2| + |x_2|$ je normou na $\mathbb{R}^2$.

Cv. 16.40 Porovnejte hodnoty různých druhů norem na $\mathbb{R}^2$, např. p-normy pro $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Cv. 16.41 Proč není p-norma normou pro $p \in (0, 1)$? Které axiomy jsou porušeny?

Cv. 16.42 Dokažte, že vzdálenost od x k y je stejná jako od y k x, tj. $\|x - y\| = \|y - x\|$.

Cv. 16.43 Dokažte: $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$.

Cv. 16.44 Buď $\|\cdot\|$ norma nad $\mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Dokažte, že $\|x\|_A := \|Ax\|$ je také norma.

Cv. 16.45 Buďte $k \leq n$ pevné. Rozhodněte, zda je normou na $\mathbb{R}^n$ zobrazení, které vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ přiřadí součet k největších hodnot z $|x_1|, \ldots, |x_n|$. Co dostaneme pro $k = 1$ a pro $k = n$?

Cv. 16.46 Rozhodněte, které průměry (aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický) představují normu.

Cv. 16.47 Rozhodněte, zda pro každou normu na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{C}^n$ platí: $\|x\| = \||x|\|$.

Cv. 16.48 Norma je *monotónní* pokud pro všechny $x, y \in \mathbb{R}^n$ nerovnost (po složkách) $|x| \leq |y|$ implikuje $\|x\| \leq \|y\|$.

(a) Rozhodněte, zda p-norma je monotónní pro $p \in \{1, 2, \infty\}$.
(b) Rozhodněte, zda je monotónní norma $\|x\| := |x_1 - x_2| + |x_2|$ na $\mathbb{R}^2$.

Cv. 16.49 Buď $\|x\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ a definujme tzv. *duální normu* $\|x\|^D := \max_{\|y\|\leq 1} x^T y$.

(a) Ukažte, že duální norma je skutečně normou.
(b) Zavedeme-li normu $\|x\|_\alpha := \alpha\|x\|$, pak $\|x\|_\alpha^D = \alpha^{-1}\|x\|$.
(c) Vyjádřete duální normu k p-normě s $p \in \{1, 2, \infty\}$.

Poznámka. Platí $(\|x\|^D)^D = \|x\|$ pro každou normu na $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{C}^n$. Na nekonečnědimensionálních prostorech už to neplatí.

Cv. 16.50 Ukažte, že tzv. Frobeniova norma $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ je normou na prostoru matic $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Cv. 16.51 Ukažte, že norma je spojitá funkce.

Cv. 16.52 Dokažte $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Cv. 16.53 Jednotková koule obecné normy.

(a) Ukažte, že pro každou normu je jednotková koule $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \le 1\}$ množina symetrická dle počátku a konvexní (tj., s každými dvěma body obsahuje i jejich spojnici).

(b) Buď $o \neq x \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že polopřímka $\{\alpha x;\ \alpha \ge 0\}$ protne jednotkovou kružnici právě jednou.

(c) Kolik stěn a vrcholů má polyedr jednotkové kružnice v 1-normě a ∞-normě?

(d) Určete jednotkovou kružnici normy $\|x\| := |x_1 - x_2| + |x_2|$ na $\mathbb{R}^2$.

*(e) Buď B konvexní uzavřená omezená množina v $\mathbb{R}^n$ a symetrická dle počátku. Nechť počátek neleží na hranici B. Ukažte, že B je jednotkovou koulí pro určitou normu.

Cv. 16.54 Pro danou normu na $\mathbb{R}^n$ nazveme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ isometrií pokud $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Ukažte, že isometrie musí být regulární maticí.

(b) Ukažte, že množina isometrií tvoří grupu s operací maticový součin.

(c) Najděte všechny isometrie pro 2-normu (tj., eukleidovskou normu).

(d) Najděte všechny isometrie pro 1-normu a ∞-normu.

Cv. 16.55 Pro normu $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ a dva vektory $x, y \in \mathbb{R}^n$ označme

$$\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{R}^n;\ \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|\}.$$

(a) Co representuje $\mathcal{C}$ pro eukleidovskou normu?

(b) Buď $x = (1, 0)^T$ a $y = (0, 1)^T$. Určete $\mathcal{C}$ pro 1-normu a ∞-normu.

(c) Buď $x = (1, 1)^T$ a $y = (1, -1)^T$. Určete $\mathcal{C}$ pro 1-normu a ∞-normu.

(d) Ukažte, že $\mathcal{C}$ je konvexní množina.

17 Ortonormální systém a Gramova–Schmidtova ortogonalizace

Gramova–Schmidtova ortogonalizace vektorů $x_1, \dots, x_n$:

1: **for** $k := 1$ **to** n **do**

2: $\quad y_k := x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j,$

3: $\quad z_k := \frac{1}{\|y_k\|} y_k,$

4: **end for**

Výstup: ortonormální báze $z_1, \dots, z_n$.

Ukázka 17.1 (Gramova–Schmidtova ortogonalizace)**.** Při standardním skalárním součinu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$x_1 = (1,0,1,0)^T, \quad x_2 = (1,1,1,1)^T, \quad x_3 = (1,0,0,1)^T.$$

Řešení: Postupujeme přesně podle algoritmu:

$$\begin{aligned}
y_1 &:= x_1, \\
z_1 &:= \frac{1}{\|y_1\|} y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)^T, \\
y_2 &:= x_2 - \langle x_2, z_1 \rangle z_1 = (1,1,1,1)^T - \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)^T = (0,1,0,1)^T, \\
z_2 &:= \frac{1}{\|y_2\|} y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1)^T, \\
y_3 &:= x_3 - \langle x_3, z_1 \rangle z_1 - \langle x_3, z_2 \rangle z_2 \\
&= (1,0,0,1)^T - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)^T - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1)^T = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T, \\
z_3 &:= \frac{1}{\|y_3\|} y_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T.
\end{aligned}$$

Výsledná ortonormální báze se skládá z vektorů z_1, z_2, z_3. □

Projekce x do podprostoru s ortonormální bází $z_1, \dots, z_n$: $x_U = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$.

Ukázka 17.2 (Ortogonální projekce a vzdálenost)**.** Najděte projekci vektoru $x = (1,2,4,5)^T$ do podprostoru V generovaného vektory

$$x_1 = (1,0,1,0)^T, \quad x_2 = (1,1,1,1)^T, \quad x_3 = (1,0,0,1)^T$$

a určete vzdálenost x od V při standardním skalárním součinu.

Řešení: Nejprve najdeme ortonormální bázi V pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace. To jsme již učinili v ukázce 17.1, a ortonormální bází jest

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0)^T, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1)^T, \quad z_3 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T.$$

Nyní najdeme projekci dle vzorce

$$x_U = \sum_{i=1}^{3} \langle x, z_i \rangle z_i = \frac{1}{2}(5,7,5,7)^T.$$

Hledaná vzdálenost je $\|x - x_U\| = \|\frac{1}{2}(-3,-3,3,3)^T\| = 3.$ □

Cvičení

Ortonormální a ortogonální systémy

Cv. 17.1 Buď U podprostor V, buď $z_1, \dots, z_k$ jeho ortonormální báze a $z_1, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi prostoru V. Buď $x \in V$.

(a) Vyjádřete $\|x\|^2$ za použití Pythagorovy věty.

(b) Buď x' projekce x na podprostor U. Vyjádřete $\|x'\|^2$ a porovnejte ji s $\|x\|^2$.

Cv. 17.2 Buď $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalární součin a $(1,0,1)^T$, $(1,2,0)^T$, $(0,1,1)^T$ jeho ortonormální báze. Spočítejte hodnotu $\langle (3,1,1)^T, (2,1,6)^T \rangle$.

Cv. 17.3 Ukažte, že matice $I_n - q_1 q_1^T, \dots, I_n - q_k q_k^T$ komutují, pokud vektory $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální.

Gramova–Schmidtova ortogonalizace a projekce

Cv. 17.4 Co se stane, když Gramova–Schmidtova ortogonalizace

(a) dostane na vstup lineárně závislé vektory?

(b) dostane na vstup ortogonální vektory?

(c) dostane na vstup ortonormální vektory?

(d) dostane na vstup $-x_i$ namísto x_i? Jak se změní výstup?

Cv. 17.5 Buď $x_1 = (1,1,0)^T$, $x_2 = (1,1,1)^T$:

(a) ortogonalizujte vektory x_1, x_2,

(b) ortogonalizujte vektory v opačném pořadí,

(c) najděte projekci $x = (0,1,1)^T$ do podprostoru $U = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Jaká je vzdálenost x od U?

Cv. 17.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte ortonormální bázi $\mathcal{R}(A)$ a určete projekci $x = (2,2,1,5)^T$ do $\mathcal{R}(A)$.

Cv. 17.7 najděte dvě *různé* (nemají společný vektor ani v násobku) ortogonální báze $\mathcal{R}(A)$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 17.8 Nad $\mathbb{C}^3$ ortogonalizujte $(i,i,i)^T,\ (0,i,i)^T,\ (0,0,i)^T$.

Cv. 17.9 Pro skalární součin $\langle x, y\rangle \coloneqq 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ zortogonalizujte $(1,0,1,0)^T$, $(1,1,1,1)^T$, $(0,1,1,0)^T$.

Cv. 17.10 V aritmetice s omezenou přesností na 3 číslice ortonormalizujte vektory:

$$(1, 10^{-3}, 10^{-3})^T,\ (1, 10^{-3}, 0)^T,\ (1, 0, 10^{-3})^T.$$

Cv. 17.11 Zortonormalizujte bázi:

(a) podprostoru $\mathbb{R}^3$ popsaného rovnicí $x - y + z = 0$,

(b) podprostoru $\mathbb{R}^4$ popsaného soustavou $x - y + u + v = 0,\ x + u = 0$,

18 Ortogonální doplněk a projekce

Ortogonální doplněk množiny vektorů $M \subseteq V$:

$$M^{\perp} := \{x \in V;\ \langle x, y\rangle = 0\ \forall y \in M\}.$$

Ukázka 18.1 (Ortogonální doplněk)**.** Buďte M, N dvě množiny vektorů v prostoru V. Rozhodněte o platnosti ekvivalence:

$$M^{\perp} = N^{\perp} \iff \operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(N).$$

Řešení: Ekvivalence platí a použijeme mj. vztahu $M^{\perp} = \operatorname{span}(M)^{\perp}$.

„$\Rightarrow$“ Tudíž $\operatorname{span}(M)^{\perp} = M^{\perp} = N^{\perp} = \operatorname{span}(N)^{\perp}$, z čehož $\operatorname{span}(M) = (\operatorname{span}(M)^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{span}(N)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{span}(N)$.

„$\Leftarrow$“ Je-li $\operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(N)$, pak $M^{\perp} = \operatorname{span}(M)^{\perp} = \operatorname{span}(N)^{\perp} = N^{\perp}$. □

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{R}(A)^{\perp} = \operatorname{Ker}(A).$$

Ukázka 18.2 (Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$)**.** Při standardním skalárním součinu najděte ortogonální doplněk prostoru V generovanému vektory $(1,2,3)^T$ a $(1,-1,0)^T$.

Řešení: Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní $V = \mathcal{R}(A)$, a protože $V^{\perp} = \operatorname{Ker}(A)$, stačí nalézt bázi jádra matice A, kterou tvoří např. vektor $(1,1,-1)^T$. □

Matice projekce do $\mathcal{S}(A)$: $A(A^TA)^{-1}A^T$.

Ukázka 18.3 (Ortogonální projekce)**.** Najděte projekci vektoru $x = (1,2,4,5)^T$ do podprostoru V generovaného vektory

$$x_1 = (1,0,1,0)^T,\quad x_2 = (1,1,1,1)^T,\quad x_3 = (1,0,0,1)^T,$$

a určete vzdálenost x od V při standardním skalárním součinu.

Řešení: Jsou dva základní postupy. První jsme předvedli v ukázce 17.2, kdy jsme našli ortonormální bázi V pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace, setrojili projekci vektoru x do podprostoru V a nakonec určili vzdálenost x od jeho projekce.

Protože pracujeme se standardním skalárním součinem, můžeme projekci spočítat alternativně i takto: Sestavíme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce jsou tvořeny vektory x_1, x_2, x_3, a projekce se spočítá dle vzorce

$$x_U = A(A^TA)^{-1}A^Tx = \frac{1}{2}(5,7,5,7)^T.$$

Poznamenejme, že zde

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

představuje matici projekce jakožto lineárního zobrazení do podprostoru U. Takže pokud ji máme takto explicitně vyjádřenou, tak projekce x_U vektoru x se spočítá jako $x_U = Px$. $\square$

Ukázka 18.4 (Metoda nejmenších čtverců a lineární regrese)**.** Mějme data vývoje světové populace:

rok	1950	1960	1970	1980	1990	2000
populace (mld.)	2,519	2,982	3,692	4,435	5,263	6,070

Najděte lineární závislost velikosti populace na čase, a odhadněte velikost populace pro rok 2009.

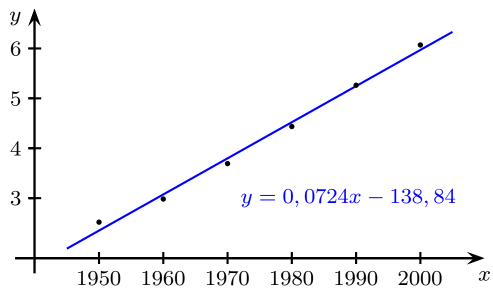
Řešení: Chceme data proložit co nejlépe přímkou $y = px + q$:

$$\begin{aligned} 2,519 &= p \cdot 1950 + q \\ &\vdots \\ 6,070 &= p \cdot 2000 + q \end{aligned}$$

To odpovídá přeurčené soustavě $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1950 & 1 \\ 1960 & 1 \\ 1970 & 1 \\ 1980 & 1 \\ 1990 & 1 \\ 2000 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.519 \\ 2.982 \\ 3.692 \\ 4.43 \\ 55.263 \\ 6.070 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Sestavíme si soustavu normálních rovnic $(A^TA)x = A^Tb$, a její řešení $x = (p,q)^T = (0,0724, -138,84)^T$ je řešení metodou nejmenších čtverců. Grafické znázornění závislosti:



Predikci pro rok 2009 zjistíme jednoduše jako $2009 \cdot p + q = 6,6943$. $\square$

Cvičení

Ortogonální doplněk

Cv. 18.1 Pro prostor V určete $V^{\perp}$, $\{o\}^{\perp}$ a $\{\}^{\perp}$.

Cv. 18.2 Buď $M, N \subseteq V$. Ukažte:

(a) $M \cap M^{\perp} \subseteq \{o\}$ (dokažte z definice),

(b) $(M^{\perp})^{\perp} = \operatorname{span}(M)$,

(c) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$, ale ne naopak,

(d) $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$,

(e) $(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

Cv. 18.3 Najděte podprostor $U \Subset \mathbb{R}^5$ takový, že $\dim U = \dim U^{\perp}$.

Cv. 18.4 Spočítejte ortogonální doplněk vektoru $u = (1, 0, 0, -2)^T$ do prostoru $V = \operatorname{span}\{v, w\} = \operatorname{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$.

Cv. 18.5 Buď $V \Subset \mathbb{R}^{3\times 3}$ prostor antisymetrických matic v $\mathbb{R}^{3\times 3}$, tj. matic A splňujících $A^T = -A$. Při skalárním součinu ze cv. 16.37 najděte bázi prostoru

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}.$$

Cv. 18.6 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že pro každou matici $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\operatorname{trace}(X) = 0$, platí $\operatorname{trace}(AX) = 0$. Ukažte, že $A = \lambda I_n$ pro určité $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Hint:* cv. 16.37.)

Cv. 18.7 Buď U podprostor V a buďte $a, b \in V$. Ukažte, že afinní podprostory $a + U$, $b + U^{\perp}$ se protínají v jediném bodě.

Projekce

Několik cvičení na projekci jsme uvedli již v předchozí kapitole v souvislosti s Gramovou–Schmidtovou ortogonalizací.

Cv. 18.8 Dokažte, že projekce je lineární zobrazení.

Cv. 18.9 Uvažujme standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ a přímku $p = \operatorname{span}\{a\}$.

(a) Najděte bod x' na přímce p, který je nejbližší bodu $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Najděte projekci $b = (3, -2, 5)^T$ na přímku se směrnicí $a = (2, 1, 1)^T$.

(c) Porovnejte velikost projekce x' s vektorem x.
Dokážete zobecnit výsledek pro projekci do libovolného podprostoru?

(d) Sestrojte matici lineárního zobrazení reprezentující překlopení podle přímky p.

Cv. 18.10 Rozložte:

(a) $u = (3, 2, 6)^T$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$ a $w \in V^{\perp}$.

(b) $u = (1, 2, 4, 6)$ na součet $u = v + w$, kde $v \in V = \operatorname{span}\{(1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T\}$ a $w \in V^{\perp}$.

Cv. 18.11 Určete vzdálenost bodu $a = (5, 5, 3, 3)^T$ od roviny obsahující o, $b = (8, -1, 1, -2)^T$ a $c = (4, -2, 2, -1)^T$.

Cv. 18.12 Určete vzdálenost

(a) bodu $X : (5, 3, 6)^T$ od přímky procházející body $A : (1, 1, 1)^T$, $B : (2, 3, 3)^T$,

(b) bodu $X : (6,6,4,4)^T$ od roviny obsahující body $A : (1,1,1,1)^T$, $B : (9,1,1,-1)^T$, $C : (5,-1,3,0)^T$.

Cv. 18.13 Určete vzdálenost přímek

(a) $p = (9,-2,0)^T + \mathrm{span}\{(4,-3,1)^T\}$ a $q = (0,-7,2)^T + \mathrm{span}\{(-2,9,2)^T\}$.

(b) $p = (-3,2,3,3)^T + \mathrm{span}\{(-1,1,1,0)^T\}$ a $q = (6,5,7,3)^T + \mathrm{span}\{(0,0,-1,2)^T\}$.

(c) $p = (7,5,8,1)^T + \mathrm{span}\{(2,0,3,1)^T\}$ a $q = \{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1 - 4x_3 = -7,\ x_2 + 2x_3 = 5,\ x_4 = 3\}$.

Cv. 18.14 Buď P matice projekce do $U \Subset \mathbb{R}^n$. Najděte matici projekce do $U^\perp$.

Cv. 18.15 Buď U podprostor V a mějme $x \in V$ vyjádřeno jako $x = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in U^\perp$. Dokažte, že u je projekce x do U a v je projekce x do $U^\perp$.

Cv. 18.16 Buď $o \neq a \in \mathbb{R}^n$. Najděte matici projekce do $V = \mathrm{span}\{a\}^\perp$ a dokažte, že je singulární.

Cv. 18.17 Buď S_{nn} prostor symetrických a T_{nn} prostor antisymetrických matic v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Ukažte $S_{nn}^\perp = T_{nn}$,

(b) Ukažte, že projekce $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ do S_{nn} je dána $\frac{1}{2}(A + A^T)$.

Cv. 18.18 Ukažte, že projekce vektoru x do podprostoru U se dá vyjádřit jako jednoznačný bod v průniku podprostoru U a afinního podprostoru $U^\perp + x$.

Cv. 18.19 Buďte U, V podprostory prostoru W takové, že $U \subseteq V^\perp$. Ukažte, že pro projekce vektoru $x \in W$ do podprostorů $U + V$, U a V platí $x_{U+V} = x_u + x_V$.

Doplněk v $\mathbb{R}^n$

Cv. 18.20 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte $\mathcal{R}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ a nakreslete je do obrázku.

Cv. 18.21 Najděte bázi ortogonálního doplnku k prostorům:

(a) $V = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$.

(b) $U = \mathrm{span}\{(1,0,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\}$.

Cv. 18.22 Buď $v \in \mathbb{R}^n$ takový, že $v_i \neq 0$ pro všechna i. Ukažte, že $\{v\}^\perp$ obsahuje vektory ze všech ortantů kromě těch obsahujích v a $-v$.

Cv. 18.23 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a uvažujme dvě zobrazení $f\colon x \to Ax$, $g\colon y \to A^T y$. Ukažte, že pro libovolný podprostor $U \Subset \mathbb{R}^n$ platí $f(U) \subseteq U \ \Rightarrow\ g(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

Cv. 18.24 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Ukažte, že pokud pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $Ax = 0 \ \Rightarrow\ Bx = 0$, tak potom $B = CA$ pro nějaké $C \in \mathbb{R}^{k\times m}$.

Projekce v $\mathbb{R}^n$

Cv. 18.25 Najděte matici projekce

(a) do $U = \mathrm{span}\{(2,1,1)^T\}$,

(b) do roviny souřadných os x_1, x_2 v prostoru $\mathbb{R}^n$,

(c) do $U = \mathrm{span}\{(0,1,1)^T, (1,0,-1)^T, (0,0,1)^T\}$.

Cv. 18.26 Buď P matice projekce.

(a) Do jakého prostoru U a jaké dimenze projektuje?

(b) Buď P matice projekce. Dokažte: $\mathcal{S}(A) = \{x;\, Px = x\}$.

(c) Dokažte: $x \in U^{\perp} \;\Leftrightarrow\; Px = o$.

Cv. 18.27 Buďte sloupce matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ortonormální. Vyjádřete matici projekce do $\mathcal{S}(A)$ a ukažte, že projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^n$ do $\mathcal{S}(A)$ pomocí této matice projekce odpovídá dřívějšímu vyjádření projekce do podprostoru s ortonormální bází.

Cv. 18.28 Určete vzdálenost $c \in \mathbb{R}^n$ od

(a) podprostoru $a^T x = 0$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$.

(b) podprostoru $a^T x = b$, kde $o \neq a \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$.

Cv. 18.29 Určete projekci bodu $x \in \mathbb{R}^n$ na přímku $p = b + \operatorname{span}\{a\}$.

Cv. 18.30 Určete vzdálenost:

(a) bodu $x \in \mathbb{R}^n$ od přímky $p = \operatorname{span}\{a\}$, $a \neq o$.

(b) počátku od přímky $p = b + \operatorname{span}\{a\}$, $a \neq o$, v prostoru $\mathbb{R}^2$.

(c) bodu $x \in \mathbb{R}^n$ od přímky $p = b + \operatorname{span}\{a\}$, $a \neq o$.

Cv. 18.31 Buď P matice projekce do podprostoru $V \Subset \mathbb{R}^n$. Vyjádřete význam zobrazení daného maticí $H \coloneqq I_n - 2P$. Dokažte algebraicky a významově proč $H^2 = I_n$.

Cv. 18.32 Buď P matice projekce. Dokažte $\operatorname{rank}(P) = \operatorname{trace}(P)$.

Cv. 18.33 Buďte P, Q matice projekce v $\mathbb{R}^n$. Dokažte $\mathcal{S}(P) = \mathcal{S}(Q)$ právě tehdy, když $PQ = P$ a $QP = Q$.

Pokud platí jedna z těchto podmínek, musí $P = Q$?

Cv. 18.34 Buď P matice projekce do $U \Subset \mathbb{R}^n$ a Q matice projekce do $V \Subset U^{\perp}$.

(a) Ukažte, že $PQ = 0$.

(b) Ukažte, že $P + Q$ je matice projekce do $U + V$.

Cv. 18.35 Buď P matice projekce do $U \Subset \mathbb{R}^n$ a Q matice projekce do $V \Subset \mathbb{R}^n$. Dokažte $P + Q$ je matice projekce do $U + V$ právě tehdy, když $PQ = QP = 0$.

Cv. 18.36 Buď $A = RC$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$, a všechny matice mají hodnost r. Ukažte, že $R^T A C^T$ je regulární.

Cv. 18.37 Ukažte, že matice splňující $P = P^T P$ je maticí projekce.

Cv. 18.38 Odvoďte analogii vztahu $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$ pro sloupcové prostory matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Cv. 18.39 Víme, že pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n je $A^T A$ regulární. Zobecněte tvrzení pro komplexní matice.

Metoda nejmenších čtverců

Cv. 18.40 Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustav

(a) $Ax = b$, kde $A = (1, 2, 1, 2)^T$ a $b = (5, 5, 5, 5)^T$,

(b) $Ax = b$, kde $A = (1, \ldots, 1)^T$ se skládá ze sloupce jedniček a $b \in \mathbb{R}^n$,

(c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Cv. 18.41 Jaké je řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších rovnic, pokud $b \in \mathcal{S}(A)^{\perp}$?

Cv. 18.42 Vyjádřete řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších rovnic, pokud sloupce matice A jsou ortonormální.

Cv. 18.43 Ukažte, že řešení metodou nejmenších rovnic, tj. jako řešení normálních rovnic $A^T Ax = A^T b$, je stejné jako druhá část vektoru řešení soustavy $\begin{pmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 18.44 *Hookův zákon* vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla	5	7	8	10	12
průtah	11.1	15.4	17.5	22	26.3

Cv. 18.45 Rakovinné buňky se množí exponenciálně rychle v čase. Určete konkrétní vztah ve tvaru $y = a\,e^{b\,t}$ při následujících datech.

t (čas)	1	2	3	4	5
y (počet buněk)	16	27	45	74	122

Cv. 18.46 Určete nejlepší aproximaci (metodou nejmenších čtverců) funkce e^x na intervalu $[-1, 1]$ pomocí lineární funkce $y = ax + b$.

Cv. 18.47 Uvažujme soustavu rovnic $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má hodnost m. Existuje tedy vždy aspoň jedno řešení. Najděte to řešení, které je v eukleidovské normě nejblíže počátku.

19 Ortogonální matice

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální: $Q^TQ = I_n$.

$Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitární: $\overline{Q}^TQ = I_n$.

Ukázka 19.1 (Unitární matice)**.** Ověřte, že matice Q je ortogonální a U je unitární,

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Jednoduše ověříme z definice

$$Q^TQ = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$\overline{U}^TU = \frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1-2i & 1-i \\ 1+i & -2i-1 \end{pmatrix}\frac{\sqrt{7}}{7}\begin{pmatrix} 1+2i & 1-i \\ 1+i & 2i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

□

Ukázka 19.2 (Householderova matice)**.** Ukažte, že Householderova matice je symetrická.
Řešení: Householderova matice je tvaru $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$. Ověříme

$$H(u)^T = \left(I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T\right)^T = I_n^T - \frac{2}{u^Tu}(uu^T)^T = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T = H(u),$$

tudíž je $H(u)$ symetrická. □

Cvičení

Cv. 19.1 Nechť $P, Q \in \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální. Je $P + Q$ ortogonální?

Cv. 19.2 Dokažte, že

$$G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je ortogonální.

Cv. 19.3 Najděte matici otočení v $\mathbb{R}^3$ kolem osy x o úhel $\alpha = 45^\circ$ proti směru hodinových ručiček.

Cv. 19.4 Buď $p \in S_n$ permutace a $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ odpovídající permutační matice, tj. $P_{ij} = 1$ pokud $p(i) = j$ a nula jinak (srov. cv. 6.21).

(a) Dokažte, že P je ortogonální matice.
(b) Dokažte, že P^T odpovídá permutaci p^{-1}.
(c) Dokažte, že PQ odpovídá permutaci $q \circ p$, jestliže Q je matice permutace q.

Cv. 19.5 Buď $H(u) = I_n - \frac{2}{u^Tu}uu^T$, $u \neq o$, Householderova matice.

(a) Sestrojte $H(u)$ pro $u = (1,1,0)^T$ a pro $u = (1,1,1)^T$.
(b) Najděte všechny Householderovy matice řádu 1.
(c) Dokažte, že $H(u)$ je ortogonální.
(d) Ukažte, že $-I_n$ není Householderova matice pro $n \geq 2$.

(e) Rozhodněte, zda I_n je Householderovou maticí.

(f) Najděte všechny diagonální Householderovy matice.

(g) Rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & H(u) \end{pmatrix}$ je také Householderova matice.

(h) Jsou-li A, B Householderovy matice, rozhodněte, zda i $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ je Householderova matice.

Cv. 19.6 Nechť $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ortogonální. Je bloková matice $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ ortogonální?

Cv. 19.7 Ortogonální matice Q obsahuje pouze prvky $\pm\frac{1}{4}$. Jaký je rozměr matice Q?

Cv. 19.8 Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?

Cv. 19.9 Najděte všechny horní trojúhelníkové ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?

Cv. 19.10 Najděte všechny diagonální unitární matice řádu n. Kolik jich je?

Cv. 19.11 Najděte všechny ortogonální matice řádu 1 a 2.

Cv. 19.12 Které z matic elementárních úprav jsou ortogonální?

Cv. 19.13 Pro které $a, b \in \mathbb{R}$ je matice A ortogonální?

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & a+b \end{pmatrix}.$$

Co představuje za útvar množina všech výsledných dvojic (a, b)?

Cv. 19.14 Rozhodněte, zda matice je ortogonální:

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x)\cos(y) & \sin(x)\sin(y) \\ -\sin(x) & \cos(x)\cos(y) & \cos(x)\sin(y) \\ 0 & -\sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Cv. 19.15 Rozhodněte, zda matice je unitární:

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{-2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Cv. 19.16 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte, že matice A je ortogonální právě tehdy, když $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ (při eukleidovské normě).

Cv. 19.17 Nechť (ne nutně čtvercová) matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ortonormální sloupce. Ukažte, že $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ (při eukleidovské normě).

Cv. 19.18 Norma je ortogonálně invariantní pokud $\|x\| = \|Qx\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ a každou ortogonální matici $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte, že eukleidovská norma je jediná ortogonálně invariantní norma splňující $\|e_1\| = 1$.

Cv. 19.19 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Ukažte, že matice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s prvky $b_{ij} = a_{ij}^2$ je dvojitě stochastická (viz cv. 3.29).

Cv. 19.20 Ukažte, že množina ortogonálních matic v $\mathbb{R}^{n\times n}$ je kompaktní.

Cv. 19.21 Cayleyho transformace $\mathcal{C}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je definovaná takto $\mathcal{C}(A) = (I-A)(I+A)^{-1}$. Ukažte:

(a) Je-li A antisymetrická (tj. $A^T = -A$), pak $\mathcal{C}(A)$ je ortogonální.

(b) Je-li A ortogonální a $A + I$ regulární, pak $\mathcal{C}(A)$ je antisymetrická.

Cv. 19.22 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a buď $z_1, \dots, z_n$ ortonormální báze $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \langle Az_i, z_i\rangle$ při standardním skalárním součinu (*Hint:* lze využít cv. 4.34).

Cv. 19.23 Říkáme, že zobrazení f je *unitární*, pokud $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna x, y (tj., zachovává skalární součin). Ukažte, že

(a) zobrazení $f\colon V \to \mathbb{R}^n$ definované $f(v) = [v]_B$, kde B je ortonormální báze, je unitární.

(b) složení dvou unitárních zobrazení je unitární zobrazení,

(c) inverze k unitárnímu isomorfismu je unitární isomorfismus,

(d) množina všech unitárních isomorfismů na prostoru tvoří grupu,

(e) dva konečně generované reálné (resp. komplexní) prostory se skalárním součinem mají stejnou dimenzi právě tehdy, když mezi nimi existuje unitární isomorfismus,

(f) jsou-li $x_1, \dots, x_n$ a $y_1, \dots, y_n$ dvě báze takové, že $\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$ pro všechna i, j, pak existuje unitární zobrazení f takové, že $f(x_i) = y_i$ pro všechna i.

20 Determinant

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}.$$

Ukázka 20.1 (Výpočet deteminantu z definice)**.** Matice řádu 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Matice řádu 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Pro výpočet determinantu matice řádu 3 (*pouze!*) lze použít mnemotechnickou pomůcku, tzv. Sarrusovo pravidlo. Pokud si matici zvětšíme zkopírováním prvních dvou řádků pod původní matici, pak tři kladné členy v permutačním rozvoji odpovídají součinu tří diagonál

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \end{array}\right),$$

a tři záporné členy v permutačním rozvoji odpovídají součinu tří šikmých diagonál, dle obrázku:

$$\left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \\ \hline \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \\ \hline a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right).$$

$\square$

Ukázka 20.2 (Výpočet deteminantu pomocí elementárních úprav)**.** Determinant matice můžeme spočítat pomocí Gaussovy eliminace s tím, že si uvědomíme jak jednotlivé elementární úpravy ovlivňují výsledný determinant

(a) vynásobení řádku číslem α zvětší determinant α-krát,

(b) prohození dvou řádků mění znaménko determinantu,

(c) přičtení násobku řádku k jinému řádku determinant nemění.

Konkrétně, spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&3\\2&5&5&5\\0&2&-3&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&0&-2&-1\\0&1&-1&-3\\0&2&-3&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&-3\\0&0&-2&-1\\0&2&-3&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&-3\\0&0&-2&-1\\0&0&-1&2\end{vmatrix}$$
$$=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&-3\\0&0&1&0.5\\0&0&-1&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&-1&-3\\0&0&1&0.5\\0&0&0&2.5\end{vmatrix}=5.$$ □

Laplaceův rozvoj: $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$

Ukázka 20.3 (Laplaceův rozvoj determinantu)**.** Laplaceův rozvoj dává rekurentní předpis pro počítání determinantu. Rozvoj podle i-tého řádku jest

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A^{ij}).$$

Zde, $\det(A^{ij})$ je determinant matice A bez i-tého řádku a j-tého sloupce. Determinanty těchto menších matic spočítáme opět rozvojem, nebo přímo, nebo elementárními úpravami, záleží na nás.

Konkrétně, spočítejte determinant Laplaceovým rozvojem podle posledního řádku

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&2\\2&5&5&5\\0&2&-4&-4\end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&1&2\\2&5&5&5\\0&2&-4&-4\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\2&1&2\\5&5&5\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1&3&4\\1&1&2\\2&5&5\end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{4+3}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix}1&2&4\\1&2&2\\2&5&5\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&1\\2&5&5\end{vmatrix}$$
$$=0+2\cdot 4+4\cdot 2-4\cdot 2=8$$ □

Ukázka 20.4 (Cramerovo pravidlo)**.** Cramerovo pravidlo dává explicitní vzoreček na výpočet řešení soustav lineárních rovnic $Ax=b$ s regulární maticí. Složka x_i řešení x se vyjádří jako

$$x_i=\frac{\det(A+(b-A_{*i})e_i^T)}{\det(A)},\qquad i=1,\dots,n.$$

Konkrétně, Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\1&2&1&3\\2&5&5&4\end{array}\right).$$

Řešení:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1. \qquad \square$$

Cvičení

Determinant – definice a elementární úpravy

Cv. 20.1 Spočítejte determinanty:

(a) $\det(-I_n)$,

(b) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$,

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

(e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 & a_{25} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a & 1 & a \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$,

(f) $\begin{vmatrix} 52147 & 64492 \\ 52146 & 64491 \end{vmatrix}$,

(g) $\det(-4)$,

(h) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Cv. 20.2 Pro jaké a je matice regulární? Řešte nad $\mathbb{R}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cv. 20.3 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte $\det \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$.

Cv. 20.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte $\det \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(B)$.

Cv. 20.5 Buď $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte či vyvraťte $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Cv. 20.6 Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je antisymetrická pokud $A^T = -A$. Dokažte, že pro liché n je antisymetrická matice singulární.

Cv. 20.7 Jak se změní determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, když jeho řádky zpermutujeme podle permutace $p \in S_n$, tj. řádek i se přesune na místo $p(i)$?

Cv. 20.8 Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dokažte $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Cv. 20.9 Víme, že čísla 697, 476, 969 jsou dělitelná číslem 17. Dokažte bez výpočtu determinantu, že 17 je dělitelný také determinant $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Cv. 20.10 Ukažte, že determinant matice řádu n s prvky ± 1 je dělitelný číslem 2^{n-1}.

Cv. 20.11 Bez výpočtu determinantu určete koeficient u x^4 a x^3 ve výsledném determinantu

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 & 3 \\ 3 & 3 & x & x \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.12 Bez výpočtu determinantů dokažte

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.13 Buď $c \neq 0$. Jak se změní determinant matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud každé a_{ij} vynásobíme číslem c^{i-j}.

Cv. 20.14 Ukažte, že matice řádu 3 složená pouze z prvků ± 1 má největší determinant roven 4.

Cv. 20.15 Buď $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Kolik (minimálně) nul a na jakých pozicích matice A zajistí, aby determinant byl zaručeně nulový?

Cv. 20.16 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Kolik maximálně nul může matice obsahovat, aby v permutačním rozvoji byly aspoň dva členy nenulové?

Cv. 20.17 Ukažte, že pro reálnou matici řádu $n \geq 3$ nemohou být v permutačním rozvoji všechny členy kladné.

Cv. 20.18 Určete součet determinantů všech matic řádu 3 obsahující prvky $1, 2, \dots, 9$, a každý z nich právě jednou.

Cv. 20.19 Buď $\mathcal{S}$ množina všech matic řádu n obsahujících pouze prvky 0 a 1. Ukažte, že průměrný determinant matice z $\mathcal{S}$ je roven 0.

*Cv. 20.20 Najděte matici řádu 3 obsahující prvky $1, 2, \dots, 9$, a každý z nich právě jednou, tak, aby měla maximální možný determinant. (*zdroj: American Mathematical Monthly*)

Cv. 20.21 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a označme jako A_i levou horní podmatici A velikosti i (tj. vznikne z A odstraněním posledních $n-i$ řádků a sloupců). Jsou-li matice A_i regulární, pak víme ze cv. 15.37, že matice A jde upravit na odstupňovaný tvar A' bez výměny řádků. Ukažte, že pivoty $a'_{11}, \dots, a'_{nn}$ tohoto REF tvaru jdou vyjádřit jako $a'_{ii} = \frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})}$, $i = 1, \dots, n$, přičemž dodefinujeme $\det(A_0) = 1$.

Multiplikativnost determinantu

Cv. 20.22 Rozhodněte, zda platí $\det(AB) = \det(BA)$.

Cv. 20.23 Zjednodušte výpočet $\det(SAS^{-1})$ pro $A, S \in \mathbb{T}^{n\times n}$.

Cv. 20.24 Víme $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a $\det(A) = 2$. Spočítejte $\det(2A^{-2}A^T)$.

Cv. 20.25 Jaký je determinant ortogonální matice?

Cv. 20.26 Najděte $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ takovou, aby $A^2 = -I_3$.

Cv. 20.27 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B, C^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, a $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte:

(a) Je-li A resp. D regulární, pak $\det \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$.
(b) Je-li A regulární, $m = n$, a $AC = CA$, pak $\det \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(AD - CB)$.

Laplaceův rozvoj

Cv. 20.28 Spočítejte

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.29 Spočítejte determinant matice řádu n (na prázdných pozicích jsou nuly):

$$\begin{vmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.30 O kolik se zvětší determinant matice $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A' \end{pmatrix}$, pokud prvek α zvětšíme o 1?

Cv. 20.31 Vektorový součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^3$ je definován jako

$$x \times y = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

S použitím determinantu určité matice řádu 3 dokažte, že $x \times y$ je kolmé na oba vektory x, y.

Determinant nad tělesy

Cv. 20.32 Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ spočítejte determinanty

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.33 Nad tělesem $\mathbb{C}$ spočítejte determinanty matic

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 2 \\ 1 & i & i & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2i & 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 & i \\ i & 2 & 1 & 2i \\ 2 & 1 & i & 2i \\ 2i & i & 4 & i \end{pmatrix}.$$

Cramerovo pravidlo

Cv. 20.34 Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavy rovnic

$$(a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad (b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Cv. 20.35 Můžeme něco říci o existenci řešení když $\det(A) = 0$?

Cv. 20.36 Řešte soustavu s parametry $a, b, c \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 0 & c \\ 0 & c & a & b \\ c & 0 & b & a \end{array}\right)$$

Geometrický význam determinantu

Cv. 20.37 Určete objem čtyřstěnu určeného body $A : [1, 1, 0]$, $B : [4, 2, 2]$, $C : [3, 4, 4]$ a $D : [3, 2, 2]$.

Cv. 20.38 Určete objem elipsiodu, který vznikne obrazem jednotkové koule při zobrazení $x \mapsto Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 20.39 Určete objem elipsoidu vzniknuvšího obrazem jednotkové koule při lineárním zobrazení definovaném

$$f(1, 3, 1) = (3, 1, 0),\ f(1, 0, 3) = (1, 0, 2),\ f(1, 1, 1) = (4, 1, 5).$$

Cv. 20.40 Determinanty v geometrii.

(a) Bez rozepisování determinantu ukažte, že přímka v rovině procházející body (x_1, y_1), (x_2, y_2) má popis

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Konkrétně, najděte přímku procházející body $(0, 1)$, $(-2, 3)$.

(b) Bez rozepisování determinantu ukažte, že kružnice v rovině procházející body (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) má popis

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Konkrétně, najděte kružnici procházející body $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(2, -1)$.

(c) Bez rozepisování determinantu ukažte, že rovina v prostoru procházející body (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) má popis

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Konkrétně, najděte rovinu procházející body $(0, 1, 2)$, $(1, -1, -2)$, $(3, 1, 0)$.

Cv. 20.41 Ukažte, že plocha trojúhelníku s vrcholy $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ je rovna $|d|/2$, kde

$$d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(*Hint:* Vnořte trojúhelník do 3-dimenzionálního prostoru.)

Cv. 20.42 Buďte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ nekolineární body ležící na kružnici po směru hodinových ručiček. Pro libovolné $b \in \mathbb{R}^2$ označme

$$d = \begin{vmatrix} b_1^2 + b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ukažte, že $d > 0$ pokud b leží uvnitř kružnice, $d = 0$ pokud b leží na kružnici, a $d < 0$ pokud b leží vně kružnice.

Cv. 20.43 Odvoďte základní vlastnosti determinantu na základě jeho geometrické interpretace. To jest, víme-li, že zobrazení $x \mapsto Ax$ mění objem s koeficientem $\det(A)$ (až na znaménko), ukažte hlavní myšlenku pro

(a) multiplikativitu,
(b) charakterizaci regularity,
(c) řádkovou linearitu,
(d) interpretaci definice.

Cv. 20.44 (Hadamardova nerovnost) Označme jako $d_i := \|A_{i*}\|$, $i = 1, \dots, n$, délky vektorů v řádcích matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Z geometrického náhledu určete největší hodnotu $\det(A)$.

Determinant velkých matic

Cv. 20.45 Spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.46 Spočítejte determinant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.47 Spočítejte determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & y \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.48 Vyřešte v proměnné $x \in \mathbb{R}$

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (b) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & x & & & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix} = 0.$$

Cv. 20.49 Spočítejte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} I_n & b \\ a^T & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & c \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & \dots & 1 + x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ 1 + x_n y_1 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}, \quad C_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.50 Spočítejte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & & & n \\ 2 & 3 & & & & n & n \\ 3 & & & & n & n & n \\ \vdots & & & \iddots & & & \vdots \\ n & & & \dots & & & n \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \\ 2 & 2 & 3 & & 2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & & n \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & & 0 \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.51 Dokažte pro $a \neq b$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Cv. 20.52 Označme

$$D(a_1, \dots, a_n) \coloneqq \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Dokažte, že

$$\frac{D(a_1, \dots, a_n)}{D(a_2, \dots, a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Řádková linearita determinantu

Cv. 20.53 Ukažte, že $\det(A+B) = \sum_{C \in \mathcal{D}} \det(C)$, kde $\mathcal{D}$ je množina všech matic C takových, že pro každé i je $C_{i*} = A_{i*}$ nebo $C_{i*} = B_{i*}$.

Cv. 20.54 Spočítejte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1+a_1}{a_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{1+a_2}{a_2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{1+a_n}{a_n} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b & \dots & b \\ b & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a_n \end{vmatrix}.$$

Cv. 20.55 Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hodnosti 1. Ukažte, že $\det(A + I_n) = \operatorname{trace}(A) + 1$.

Cv. 20.56

(a) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Spočítejte $\det(I_n - ab^T)$.

(b) Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární. Spočítejte $\det(A - ab^T)$.

Cv. 20.57 Ukažte, že pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje diagonální matice D s prvky ± 1 na diagonále a taková, že $A + D$ je regulární. (*Hint:* Matematická indukce a řádková linearita.)

21 Adjungovaná matice

Definice: $\operatorname{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$.
Věta: $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$.

Ukázka 21.1 (Adjungovaná matice)**.** Najděte adjungovanou matici k

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Podle definice adjungované matice počítáme postupně

$$\operatorname{adj}(A)_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5, \ \ldots$$

Nakonec dostaneme

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A jako důsledek máme rovněž

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$ □

Cvičení

Cv. 21.1 Spočítejte adjungovanou matici k zadaným a ověřte vztah $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

(b) $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

(c) zrcadlově překlopená jednotková matice,

(d) permutační matice P definovaná: $P_{ij} = 1$ pokud $p(i) = j$ a nula jinak, kde $p \in S_n$ je daná permutace.

Cv. 21.2 Vyjádřete $\operatorname{adj} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 21.3 Vyjádřete $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$.

Cv. 21.4 Spočítejte $\operatorname{adj}(I_n)$.

Cv. 21.5 Spočítejte $\operatorname{adj}(\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n))$.

Cv. 21.6 Určete $\det(\operatorname{adj}(A))$.

Cv. 21.7 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Doplňte rovnost: $\operatorname{adj}(AB) = \dots$.
Jak to bude pro A singulární?

Cv. 21.8 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rozhodněte, zda platí $\operatorname{adj}\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{adj}(A) & 0 \\ 0 & \operatorname{adj}(B) \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 21.9 Jak vypadá adjungovaná matice k horní trojúhelníkové?

Cv. 21.10 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymetrická, tj. $A = -A^T$. Jaká je $\operatorname{adj}(A)$?

Cv. 21.11 Rozhodněte, zda platí $\operatorname{adj}(A^{-1}) = \operatorname{adj}(A)^{-1}$.

Cv. 21.12 Buď A regulární a $AB = BA$. Ukažte, že $\operatorname{adj}(A)B = B\operatorname{adj}(A)$.

Cv. 21.13 Pro libovolné n najděte matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takovou, aby $\operatorname{adj}(A)$ měla jediný nenulový prvek na pozici i, j.

Cv. 21.14 Najděte co nejvíce matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňujících $A = \operatorname{adj}(A)$.

Cv. 21.15 Nechť matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix}.$$

má determinant 1. Určete A^{-1}.

Cv. 21.16 Bude inverzní matice k polynomiální matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2x & 3 \end{pmatrix}.$$

zase polynomiální matice? A jak bude vypadat?

Cv. 21.17 Buď $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Ukažte, že A má celočíselnou inverzi právě tehdy, když jde upravit na jednotkovou matici pouze s využitím elementární úpravy vynásobení řádku -1 a přičtení řádku k jinému.

Cv. 21.18 Buď $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Dokažte, že $(I_n - 2ab^T)^{-1}$ je celočíselná právě tehdy, když a^Tb je nula nebo jedna.

Cv. 21.19 Buď $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zjednodušte $\operatorname{adj}(I_n + ab^T)$. (*Hint:* cv. 20.56(a).)

Cv. 21.20 Buď $x, y \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Dokažte

$$\det \begin{pmatrix} A & x \\ y^T & 0 \end{pmatrix} = -y^T \operatorname{adj}(A)x.$$

Cv. 21.21 Pomocí Cramerova pravidla odvoďte vzorec pro inverzní matici a porovnejte jej s adjungovanou maticí.

Cv. 21.22 Pomocí věty o adjungované matici odvoďte Cramerovo pravidlo.

Cv. 21.23 Uvažujme determinant jako funkci $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Určete parciální derivaci $\det(A)$ podle a_{ij} a sestavte matici parciálních derivací.

22 Vlastní čísla

Vlastní číslo a vektor: $Ax = \lambda x,\ x \neq o.$

Charakteristický polynom: $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$

Ukázka 22.1 (Vlastní čísla a vlastní vektory)**.** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Určíme charakteristický polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Kořeny polynomu, a tedy vlastními čísly matice A, jsou hodnoty $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Vlastní vektory, příslušející vlastnímu vektoru λ_1, najdeme jako bázi jádra matice

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I)$ tvoří např. vektor $x_1 = (1, -i)^T$. Podobně vlastní vektory k λ_2 jsou bázické vektory jádra matice

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

což je například vektor $x_2 = (1, i)^T$. □

Ukázka 22.2 (Součet a součin vlastních čísel)**.** Bez počítání vlastních čísel, určete, čemu se rovná jejich součet a jejich součin, pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Součet vlastních čísel je roven součtu diagonálních prvků matice A, tedy 0, Součin vlastních čísel je roven determinantu A, což je 1. Můžeme pak ověřit výpočtem vlastních čísel $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (ukázka 22.1). □

Ukázka 22.3 (Vlastní čísla a vlastní vektory při inverzi)**.** Jak se změní vlastní čísla a vlastní vektory regulární matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ pokud ji invertujeme?

Řešení: Buď $\lambda \in \mathbb{C}$ libovolné vlastní číslo a $x \in \mathbb{C}^n$ odpovídající vlastní vektor matice A. Pak platí $Ax = \lambda x$. Přenásobením A^{-1} dostaneme $x = \lambda A^{-1} x$, a vydělením $\lambda \neq 0$ pak máme $A^{-1} x = \lambda^{-1} x$. Tudíž vlastní čísla budou převrácené hodnoty těch původních a vlastní vektory zůstanou stejné. □

Cvičení

Vlastní čísla, vlastní vektory

Cv. 22.1 Spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jak moc jsou vlastní vektory jednoznačné?

Cv. 22.2 Spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 22.3 Spočítejte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 22.4 Buď λ vlastní číslo a x odpovídající vlastní vektor matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že pokud vektoru v změníme na sudých pozicích znaménka, pořád zůstane vlastním vektorem. Jakému vlastnímu číslu bude příslušet?

Cv. 22.5 Spočítejte spektrální poloměr matic $A, B, A + B$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ a(1-a)-1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ -a(1+a)-1 & -a \end{pmatrix}.$$

Co tento příklad ilustruje?

Cv. 22.6 A má vlastní číslo λ a vlastní vektor x. Jaká vlastní čísla a vektory mají matice:

(a) αA,
(b) A^2,
(c) A^T,
(d) $A + \alpha I_n$.

Cv. 22.7 Nechť $A^k = 0$. Co lze říci o vlastních číslech matice A?

Cv. 22.8 O matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ víme, že $A^2 = A + 2I_n$. Co lze říci o jejích vlastních číslech?

Cv. 22.9 Najděte nejmenší číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $A + \beta I_n$ je regulární pro všechna $\beta > \alpha$.

Cv. 22.10 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ singulární. Dokažte, že existuje posloupnost regulárních matic A_i, $i = 1, \dots,$ konvergující po složkách k A.

Cv. 22.11 Ukažte, že jeden vlastní vektor matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nemůže příslušet různým vlastním číslům.

Cv. 22.12 Známe-li vlastní čísla a vektory matic $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, jak je spočítat pro $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$?

Cv. 22.13 Jaká vlastní čísla má ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Cv. 22.14 Buď $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ permutační matice. Jaké jsou všechny možnosti pro její determinant, stopu a vlastní čísla?

Cv. 22.15 Najděte vlastní čísla a vlastní vektory permutační matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 22.16 Pro jaká $n \in \mathbb{N}$ má rotace n-dimenzionální sféry kolem počátku pevný bod (bod, který se zobrazí na sebe)?

Cv. 22.17 Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ projekční matice. Jaká má vlastní čísla a vlastní vektory?

Cv. 22.18 (a) Buď $c, d \in \mathbb{R}^n$. Jaká vlastní čísla a vektory má matice cd^T?

(b) Buďte $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Určete vlastní čísla a vektory matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s prvky $a_{ij} = h_i/h_j$.

Cv. 22.19 Buďte $a, b \in \mathbb{Z}$. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Kdy budou vlastní čísla celočíselná?

Cv. 22.20 Buďte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, že $a + b = c + d$. Najděte vlastní čísla matice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 22.21 Kdy jsou vlastní čísla matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ reálná?

Cv. 22.22 Najděte nenulovou (všude nenulovou) matici jež má všechna vlastní čísla nulová.

Cv. 22.23 Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem.

Cv. 22.24 Buď b vlastní vektor regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vyřešte soustavu $Ax = b$.

Cv. 22.25 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že AB a BA mají stejná vlastní čísla.

Cv. 22.26 Dokažte: Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo reálné matice A, pak i $\overline{\lambda}$ je jejím vlastním číslem. Jak to bude s vlastními vektory?

Cv. 22.27 Buďte λ, μ různá vlastní čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nechť x je vlastní vektor A příslušný λ, a nechť y je vlastní vektor A^T příslušný μ. Ukažte, že $x \perp y$.

Cv. 22.28 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $a_{ii} = 1$ pro všechna i. Dokažte $\rho(A) \geq 1$.

Cv. 22.29 Nechť $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ má vlastní čísla $0, 3, 5$ a odpovídají vlastním vektorům u, v, w.

(a) Najděte bázi $\mathrm{Ker}(A)$ a bázi $\mathcal{S}(A)$.

(b) Vyřešte soustavu lineárních rovnic $Ax = v + w$.

(c) Vyřešte soustavu lineárních rovnic $Ax = u$.

Charakteristický polynom

Cv. 22.30 Najděte matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ takovou, aby její vlastní čísla byla:

(a) i a $-i$,

(b) $2+i$ a $2-i$,

(c) i a $2i$.

Cv. 22.31 Rozhodněte o platnosti: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mají stejné charakteristické polynomy $\Rightarrow$ A, B mají stejná vlastní čísla.

Co naopak: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mají stejné charakteristické polynomy $\Leftarrow$ A, B mají stejná vlastní čísla.

Cv. 22.32 Buď $p_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. Vyjádřete hodnotu a_{n-1}, a_0.

Cv. 22.33 Matice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla $3, -4, 5$. Dopočítejte zbylé.

Cv. 22.34 Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $1, 2, 3$ byla vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Cv. 22.35 Najděte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby 2 bylo jedno z vlastních čísel matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \\ -4 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 22.36 Nechť prvky matice A jsou jen $0, 1$ a nechť má matice všechna vlastní čísla reálná kladná. Ukažte, že pak nutně jsou rovna 1. (*Hint:* AG nerovnost.)

Cv. 22.37 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že $p_{A^{-1}}(\lambda) = p_A(0)^{-1}(-\lambda)^n p_A(\lambda^{-1})$.

Cv. 22.38 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální. Dokažte, že $p_A(\lambda) = \pm\lambda^n p_A(\lambda^{-1})$. (*Hint:* Pro $z \in \mathbb{C}$ s vlastností $|z| = 1$ je $\overline{z} = 1/z$.)

*Cv. 22.39 Dokažte, že vlastní čísla jsou spojité funkce vzhledem k prvkům matice. Přesně řečeno, buď dána matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a λ její vlastní číslo. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že každá matice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ má nějaké vlastní číslo μ splňující $|\mu - \lambda| < \varepsilon$.

Cv. 22.40 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Nechť matice $S \coloneqq (x \,|\, Ax \,|\, A^2x \,|\, \ldots \,|\, A^{n-1}x)$ je regulární. Ukažte, že $X^{-1}AX$ je matice společnice charakteristického polynomu matice A, tj. $X^{-1}AX = C(p_A)$.

Cayleyho–Hamiltonova věta

Cv. 22.41 Buď $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Ověřte Cayleyho–Hamiltonovu větu,

(b) Vyjádřete A^{-1} jako lineární kombinaci I_2 a A.

(c) Vyjádřete A^4 jako lineární kombinaci I_2 a A.

Cv. 22.42 Matice A má vlastní čísla $0, 1, 2$. Jaká má vlastní čísla matice $A(A-I)(A-2I)$?

Invariantní podprostory

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní podprostor matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pokud:
$Ax \in U \ \forall x \in U.$

Cv. 22.43 Najděte některé obecné invariantní podprostory matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Cv. 22.44 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad x = (2,-1,0)^T, \quad y = (-1,2,-1)^T.$$

Ukažte, že $V = \operatorname{span}\{x, y\}$ je invariantní podprostor.

Cv. 22.45 Najděte všechny invariantní podprostory pro $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 22.46 Buď $B = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ báze reálného prostoru V, buď $f\colon V \to V$ lineární zobrazení s maticí ${}_B[f]_B = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, kde $A \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times s}$. Ukažte, že $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_r\}$ a $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_s\}$ jsou invariantní podprostory V.

Cv. 22.47 Buď $U \Subset \mathbb{R}^n$ invariantní podprostor ortogonální matice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte:

(a) $f(U) = U$ pro lineární zobrazení $f(x) = Qx$,

(b) $U^\perp$ je také invariantní podprostor.

Cv. 22.48 Buďte U, W invariantní podprostory matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rozhodněte, zda platí:

(a) $U \cap W$ je také invariantní podprostor,

(b) $U + W$ je také invariantní podprostor.

Cv. 22.49 Dokažte, že každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má invariantní podprostor dimenze 1 nebo 2. (*Hint:* cv. 22.26)

Vlastní čísla lineárních zobrazení

Cv. 22.50 Najděte vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení:

(a) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definovaného $f(a + bx + cx^2) = (7a + 2b + 3c) + (7b)x + (2b + c)x^2$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definovaného $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+2c & 2a+5b \\ c+2d & 3d \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 22.51 Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení:

(a) $A \mapsto A^T$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

(b) $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Cv. 22.52 Na prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$ uvažujme lineární zobrazení $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \mapsto 0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ Najděte vlastní čísla a vlastní vektory. Co jiného nám řešení ukazuje?

Cv. 22.53 Na prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$ uvažujme lineární zobrazení $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \mapsto x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots$ Najděte vlastní čísla a vlastní vektory.

Cv. 22.54 Na prostoru konvergentních reálných posloupností uvažujme lineární zobrazení $\{x_i\}_{i=1}^\infty \mapsto \{x_i - \lim_{n\to\infty} x_n\}_{i=1}^\infty$. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory.

Cv. 22.55 Buď $f\colon V \to V$ lineární zobrazení a buď $A = {}_B[f]_B$ matice f vzhledem k bázi $B = \{w_1, \dots, w_n\}$. Ukažte, že

(a) vlastní čísla zobrazení f a matice A jsou stejná,

(b) vektor $v \in V$ je vlastním vektorem f právě tehdy, když $[v]_B$ je vlastním vektorem A.

Cv. 22.56 Buďte $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineární zobrazení. Předpokládejme, že existuje báze $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že v_i je vlastním vektorem obou zobrazení f i g pro každé $i = 1, \ldots, n$. Dokažte $g \circ f = f \circ g$.

Cv. 22.57 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze n a buď U jeho m-dimenzionální podprostor. Ukažte:

(a) Je-li U invariantní pro lineární zobrazení $f, g\colon V \to V$, pak je i pro zobrazení $f + g$.

(b) Je-li U invariantní pro lineární zobrazení $f\colon V \to V$, pak je i pro zobrazení αf, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné.

(c) Množina všech lineárních zobrazení $f\colon V \to V$, pro něž je U invariantní podprostor, tvoří vektorový prostor. Určete jeho dimenzi.

23 Podobnost, diagonalizovatelnost, Jordanova normální forma

Podobnost: $A \sim B$ pokud $\exists S$ taková, že $A = SBS^{-1}$.

Ukázka 23.1 (Podobnost)**.** Najděte všechny matice podobné nulové matici řádu n.

Řešení: Podobné matice jsou tvaru $S0S^{-1} = 0$, čili nulová matice je podobná jen sama sobě. □

Ukázka 23.2 (Diagonalizace)**.** Diagonalizujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory A. Vlastní čísla jsou 4 a 2 a příslušné vlastní vektory $(1,1)^T$ a $(-1,1)^T$. Nechť matice S má ve sloupcích tyto vlastní vektory (v uvedeném pořadí!). Pak $A = S\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)S^{-1}$. □

Ukázka 23.3 (Nediagonalizace)**.** Dokažte, že matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

není diagonalizovatelná.

Řešení: Matice A má obě vlastní čísla nulová. Pokud by byla diagonalizovatelná, tak by byla podobná nulové matici: $A = S0S^{-1} = 0$, což je spor. □

Ukázka 23.4 (Jordanova normální forma)**.** Určete Jordanovu normální formu matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Řešení: Matice má vlastní číslo 5 násobnosti 2, a 7 násobnosti 3. Dále $\operatorname{rank}(A - 5I_5) = 3$, tedy k vlastnímu číslu 5 existují dva vlastní vektory. Proto 5 bude ve dvou Jordanových buňkách, které nutně musí mít velikost 1 (součet velikostí dá násobnost čísla 5). Analogicky, $\operatorname{rank}(A - 7I_5) = 3$, tedy i k číslu 7 existují dva vlastní vektory a tak 7 bude též ve dvou Jordanových buňkách. Jediná možnost je, že jedna buňka bude mít velikost 1 a druhá velikost 2. Výsledný Jordanův normální tvar je:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení

Podobnost

Cv. 23.1 Vyšetřete vlastnosti *podobnosti* jakožto relace.

Cv. 23.2 Najděte všechny matice podobné matici I_n.

Cv. 23.3 Rozhodněte, zda matice jsou si podobné

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 23.4 Jak se na matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ projeví podobnostní transformace SAS^{-1}, kde S je matice elementární řádkové úpravy?

Cv. 23.5 Najděte matici S takovou, že $A = SBS^{-1}$. To ukáže, že matice A, B jsou podobné.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 23.6 Víme, že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Platí to i naopak? Případně, za jakých předpokladů?

Cv. 23.7 Jak se mění vlastní vektory podobných matic?

Cv. 23.8 Rozhodněte o platnosti: $A \sim B \Rightarrow A^2 \sim B^2$.

Co naopak: $A \sim B \Leftarrow A^2 \sim B^2$?

Cv. 23.9 Buď $p(x)$ polynom a $A \sim B$. Rozhodněte, zda $p(A) \sim p(B)$.

Cv. 23.10 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dokažte, že $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ je podobná $\left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 23.11 Najděte všechny matice podobné jen samým sobě.

Cv. 23.12 Dokažte, že idempotentní matice stejného rozměru a hodnosti jsou si podobné. (*Hint:* cv. 15.32.)

Cv. 23.13 Ukažte, že neexistují lineární zobrazení $f, g\colon V \to V$ takové, aby $g \circ f - f \circ g = id$.

Cv. 23.14 Ukažte, že jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobné skrze komplexní matici $P + iQ$, $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak jsou podobné skrze reálnou matici (*Hint:* Nahlédněte, že je-li $P + iQ$ regulární, pak $P + \lambda Q$ je regulární pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$).

Cv. 23.15 Ukažte, že algebraická násobnost vlastního čísla je vždy větší nebo rovna geometrické násobnosti. (*Hint:* Doplňte vlastní vektory do matice a uvědomte si, proč je úloha v této sekci.)

Cv. 23.16 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ podobné. Ukažte, že maticová soustava $AX - XB = 0$ má řešení $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Cv. 23.17 Matice $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se nazývá komutátor pokud se dá vyjádřit ve tvaru $C = AB - BA$ pro vhodné matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Ukažte, že stopa komutátoru je 0. (*Hint:* cv. 3.32.)

(b) Ukažte, že komutátory jsou uzavřené na podobnost.

Diagonalizovatelnost

Cv. 23.18 Najděte dva příklady nediagonalizovatelných matic řádu 2: singulární matici a regulární matici.

Cv. 23.19 Diagonalizujete (nebo ukažte, že to není možné) matice ze cv. 22.2 a cv. 22.3.

Cv. 23.20 Rozhodněte, zda je matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ diagonalizovatelná.

Cv. 23.21 Diskutujte jednoznačnost diagonalizace.

Cv. 23.22 Nechť $A = S\Lambda S^{-1}$ je diagonalizační rozklad matice A. Určete vlastní vektory A^T.

Cv. 23.23 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelná a λ její libovolné vlastní číslo. Ukažte, že existují $x, y \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$, $x^T y = 1$.

Jak je to pro nediagonalizovatelné matice?

Cv. 23.24 Jsou diagonalizovatelné matice uzavřené na:

(a) násobky?

(b) součty?

(c) součiny?

Cv. 23.25 Pro diagonalizovatelné matice dokažte vlastnosti ze cv. 22.6 pomocí spektrálního rozkladu.

Cv. 23.26 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelná. Ukažte, že $A \sim A^T$.

Cv. 23.27 Buďte $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Platí, že A, B jsou obě diagonalizovatelné právě tehdy, když $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ je diagonalizovatelná?

Cv. 23.28 Buď $c, d \in \mathbb{R}^n$. Kdy je matice cd^T diagonalizovatelná?

Cv. 23.29 Najděte chybu v následující úvaze: Vyjděme z rovnice $Ax = \lambda x$. Je-li vlastní číslo $\lambda = 0$, pak $x \in \operatorname{Ker}(A)$. Je-li vlastní číslo $\lambda \neq 0$, pak $x \in \mathcal{S}(A)$. Protože $\dim \operatorname{Ker}(A) + \dim \mathcal{S}(A) = n - \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(A) = n$, má matice A plný počet vlastních vektorů a je tudíž diagonalizovatelná.

Cv. 23.30 Dokažte přímo Cayleyho–Hamiltonovu větu pro diagonalizovatelné matice.

Cv. 23.31 Najděte všechny diagonalizovatelné matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ splňující $A^2 + 4A + 4I_2 = 0$. Najdete i nějaké nediagonalizovatelné?

Cv. 23.32 Odvoďte předpis pro $\left(\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{smallmatrix}\right)^k$.

Cv. 23.33 Určete $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}^n$, $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^n$.

Cv. 23.34 Spočítejte vlastní čísla matice (*Hint:* cv. 22.12)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Cv. 23.35 Diagonalizovatelnost koso-diagonální matice.

(a) Zjistěte, kdy je diagonalizovatelná matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & c_2 \\ c_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zjistěte, kdy je diagonalizovatelná matice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_n \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & c_2 & \iddots & \vdots \\ c_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 23.36

(a) Určete vlastní čísla matice otočení $G(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matice s komplexními vlastními čísly $\lambda \pm \mu i$. Ukažte, že je podobná kladnému násobku matice $G(\varphi)$.

(c) Ukažte, že každá diagonalizovatelná matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobná blokově diagonální matici, jejíž bloky jsou velikosti 1 nebo 2, a každý blok velikosti 2 je tvaru kladného násobku $G(\varphi)$ pro nějaké φ.

Jordanova normální forma

Cv. 23.37 Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem.

Najděte takovou matici, aby tím jediným vlastním vektorem byl $v = (1, 1, 1)^T$.

Cv. 23.38 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Cv. 23.39 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 23.40 Najděte Jordanovu normální formu matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 7 \\ -3 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Můžete využít toho, že $p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^2$.

Cv. 23.41 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7,

(c) matice řádu 4 s vlastními čísly 5 a 7.

Cv. 23.42 Buď $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ matice s jediným vlastním vektorem. Existuje A^{-1}?

Cv. 23.43 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hodnosti k. Jaká je násobnost vlastního čísla 0?

Cv. 23.44 O kolik či kolikrát se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Jinak: víme $\operatorname{rank}(A^2) \le \operatorname{rank}(A)$. Dokažte $\operatorname{rank}(A^2) \ge \operatorname{rank}(A) - \frac{n}{2}$.

Cv. 23.45 Rozhodněte, zda platí pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$ implikuje $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+2})$,
(b) $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(BA)$ implikuje $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(BA^2)$.

Cv. 23.46 Ukažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

(a) A je nilpotentní, tj. $A^k = 0$ pro nějaké k,
(b) $A^n = 0$,
(c) $\rho(A) = 0$, tj. všechna vlastní čísla jsou nulová,
(d) $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$.
(e) $\operatorname{trace}(A^k) = 0$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$.

Cv. 23.47 Buď $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a nechť $A + \lambda B$ je nilpotentní pro $n + 1$ různých hodnot $\lambda \in \mathbb{R}$. Ukažte, že A, B jsou nilpotentní.

Cv. 23.48 Pro $\lambda \neq 0$ odvoďte $J_n(\lambda)^{-1}$. Zkuste využít cv. 3.33(e), a toho, že $J_n(0)$ je nilpotentní.

Cv. 23.49 Ukažte, že každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dá vyjádřit jako součet diagonalizovatelné a nilpotentní matice.

Cv. 23.50 Dokažte Cayleyho–Hamiltonovu větu za použití Jordanovy normální formy.

Cv. 23.51 Ukažte vztah vlastních čísel a stopy matice za použití Jordanovy normální formy.

Cv. 23.52 Najděte všechny matice $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující danou rovnost.

(a) $X^2 = I_n$,
(b) $X^2 - 4X + 4I_n = 0$,

Cv. 23.53 Umocňování Jordanovy buňky.

(a) Spočítejte $J_n(0)^k$ pro $k = 0, 1, \ldots$
(b) Ukažte, že $J_n(\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i B^{k-i}$, kde $B := \lambda I_n - J_n(\lambda)$.
*(c) Ukažte, že $J_n(\lambda)^k \to 0$ pro $k \to \infty$ právě tehdy, když $|\lambda| < 1$. (*Hint:* B je nilpotentní.)

Cv. 23.54 Dokažte, že

(a) každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dá vyjádřit jako součin dvou symetrických matic.
(b) každá antisymetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (tj., $A^T = -A$) se dá vyjádřit jako $A = ST - TS$, kde S, T jsou symetrické matice.
(c) každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \ge 2$, se dá vyjádřit jako součet dvou singulárních.

Cv. 23.55 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Platí, že každá matice je podobná svojí transpozici?

Cv. 23.56 Ukažte, že hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je větší nebo rovna počtu nenulových vlastních čísel. Najděte příklad, kdy je větší.

Cv. 23.57 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ukažte, že $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$ právě tehdy, když geometrická a algebraická násobnost 0 jako vlastního čísla je stejná.

Cv. 23.58 Buď $A = J_n(\lambda)$. Ukažte, že existuje vektor $z \in \mathbb{R}^n$ takový, že $z, Az, A^2z, \ldots, A^{n-1}z$ tvoří bázi $\mathbb{R}^n$.

Cv. 23.59 Ukažte, že idempotentní matice (tj. $A^2 = A$) jsou diagonalizovatelné. Jak je to s maticemi splňujícími $A^k = A$ pro $k > 2$?

Cv. 23.60 Buďte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Určete vlastní čísla $\operatorname{adj}(A)$.

Cv. 23.61 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nediagonalizovatelná. Dokažte, že existuje posloupnost diagonalizovatelných matic A_i, $i = 1, \ldots,$ konvergující po složkách k A. (Množina diagonalizovatelných matic je tedy *hustá* v $\mathbb{R}^{n\times n}$.)

24 Vlastní čísla symetrických a nezáporných matic

Ukázka 24.1 (Spektrální rozklad)**.** Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve spočítáme vlastní čísla a vlastní vektory A. Vlastní čísla jsou 4 a 2 a příslušné vlastní vektory $(1,1)^T$ a $(-1,1)^T$. Nyní musíme vlastní vektory zortonormalizovat. Protože odpovídají různým vlastním číslům, jsou na sebe kolmé, proto je stačí jen znormovat na jednotkovou velikost $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ a $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ a dát je do sloupců matice Q v tomto pořadí. Spektrální rozklad pak je

$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Ukázka 24.2 (Markovovy řetězce)**.** Migrace obyvatel USA město–předměstí–venkov probíhá podle empiricky zjištěného pravidla:

z města:	96% zůstane, 3% do předměstí, 1% na venkov
z předměstí:	1% do města, 98% zůstane, 1% na venkov
z venkova:	1.5% do města, 0.5% do předměstí, 98% zůstane

Počáteční stav je: 58 mil. obyvatel ve městě, 142 mil. na předměstí, a 60 mil. na venkově. Určete jak se bude situace vyvíjet v čase a zda se časem ustálí.

Řešení: Sestavme matici

$$A := \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

Je-li $x_0 = (58, 142, 60)^T$ počáteční rozložení obyvatelstva, pak vývoj v čase probíhá takto: Ax_0, A^2x_0, A^3x_0, $\ldots$,$A^\infty x_0$.

Abychom rozhodli o případném ustálení, spočítejme diagonalizační rozklad

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Nyní spočítáme

$$A^\infty = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = Q_{*1}Q^{-1}_{1*} = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.23 & 0.23 \\ 0.43 & 0.43 & 0.43 \\ 0.33 & 0.33 & 0.33 \end{pmatrix}.$$

Protože všechny sloupce A^∞ jsou stejné, výsledné rozložení nezávisí vůbec na počátečním rozložení obyvatelstva (jen na jejich počtu) a bude: 23% ve městě, 43% na předměstí, a 33% na venkově.

V řadě případů jde výpočet zjednodušit. Zabývejme se teď situací, kdy 1 je jednoznačné dominantní vlastní číslo A. Vlastním číslem je určitě, neboť $A^Te = e$, kde $e = (1, \ldots, 1)^T$. Dominantní je také, to vyplyne později z Gerschgorinových disků. Jednoznačnost nastane díky Perronově větě když $A > 0$. V tomto případě podle odvození nahoře máme $A^\infty = Q_{*1}Q^{-1}_{1*}$, kde Q_{*1} je vlastní vektor A k číslu 1, a Q^{-1}_{1*} je vlastní vektor A^T k číslu 1. Víme již, že $Q^{-1}_{1*} = e$, tedy opět sloupce A^∞ budou stejné a výsledné rozložení odpovídá složkám vlastního vektoru Q_{*1} (ty jsou kladné, opět podle Perronovy věty). Takže v případě $A > 0$ stačí jen spočítat kladný vektor z $\mathrm{Ker}(A - I_n)$, což odpovídá intuici, že ustálené rozložení representované vektorem v má splňovat $Av = v$. Nicméně, uvedený rozbor analyzuje kdy a za jakých podmínek rovnovážná situace nastává. □

Cvičení

Symetrické matice

Cv. 24.1 Ukažte, že rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 24.2 Najděte symetrickou komplexní matici s ryze komplexními vlastními čísly.

Cv. 24.3 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná? A platí věta i naopak?

Cv. 24.4 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory pro různá vlastní čísla symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

Cv. 24.5 Buď v vlastní vektor symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte: $w \in \{v\}^\perp \;\Rightarrow\; Aw \in \{v\}^\perp$. Jinými slovy, $\{v\}^\perp$ je invariantní podprostor matice A.
Poznámka: Pomocí této vlastnosti se dá také dokázat věta o spektrálním rozkladu. Začne se s jedním vlastním vektorem v a pak se použije indukce na podprostor $\{v\}^\perp$.

Cv. 24.6 Dokažte z definice, že vlastní čísla reálné symetrické matice řádu 2 jsou reálná.

Cv. 24.7 Najděte tři ortonormální vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

K jednomu vlastnímu číslu náleží dva ortonormální vlastní vektory x, y. Spočítejte $P = xx^T + yy^T$, popište její význam a ukažte, že nezávisí na volbě x, y.

Cv. 24.8 Najděte odmocninu $\sqrt{A}$ pro matici $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Cv. 24.9 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a nechť $A^k = I_n$ pro nějaké $k \geq 1$. Ukažte, že $A^2 = I_n$.

Cv. 24.10 Najděte všechny symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, které jsou nilpotentní (tj. $A^k = 0$ pro nějaké k).

Jak by to bylo pro komplexní matice?

Cv. 24.11 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická s vlastními čísly 0 a 1. Ukažte, že je to matice projekce. (Srov. cv. 22.17)

Cv. 24.12 Uvažujme matici

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

kde $b_i, c_i > 0$. Dokažte, že má reálná vlastní čísla (dokonce mají násobnost 1). *Hint:* Jistá symetrická matice má shodný charakteristický polynom.

Cv. 24.13 Dokažte, že hodnost symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dá ekvivalentně definovat jako velikost největší regulární hlavní podmatice (hlavní podmatice vznikne odstraněním řádků a sloupců se stejnými indexy); srov. cv. 15.15.

Cv. 24.14 Ukažte, že pro symetrickou matici A platí $\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{trace}(A)^2 / \mathrm{trace}(A^2)$. (*Hint:* cv. 16.30.)

Cv. 24.15 Rozhodněte, zda $A \mapsto \lambda_{\max}(A)$ je lineární zobrazení na prostoru symetrických matic, kde $\lambda_{\max}(A)$ je největší vlastní číslo A.

Cv. 24.16 Ukažte, že pro vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$. (*Hint:* Prozkoumejte A^2.)

Cv. 24.17 Připomeňme, že matice A je antisymetrická pokud $A^T = -A$. Dokažte:

(a) Vlastní čísla antisymetrické matice jsou ryze imaginární.

(b) Inverzní matice k regulární antisymetrické je opět antisymetrická.

(c) Pokud A je antisymetrická, pak $I + A$ je regulární.

(d) Pokud A je antisymetrická a D, D' diagonální s kladnou diagonálou, pak $AD + D'$ je regulární.

(e) Vlastní vektory, odpovídající různým nenulovým vlastním číslům, jsou na sebe kolmé.

(f) A je diagonalizovatelná do tvaru $A = UDU^*$, kde $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je diagonální a $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je unitární.

(g) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(h) Ukažte, že antisymetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je podobná blokově diagonální matici s bloky velikosti 1 nebo 2, přičemž bloky velikosti 1 jsou nulové a bloky velikosti 2 jsou tvaru $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Jaká jsou pak vlastní čísla matice A?

Cv. 24.18 Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ne nutně symetrická (!). Ukažte, že jde rozložit na tvar $A = UTU^*$, kde $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je horní trojúhelníková a $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitární (tzv. Schurova věta). *Hint:* Upravte důkaz spektrálního rozhladu symetrických matic.

*Cv. 24.19 Buď $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonální a ne nutně symetrická (!). Dokažte, že skrze ortogonální matici přechodu je podobná blokově diagonální matici, přičemž bloky velikosti jedna jsou ± 1 a velikosti dva jsou matice rotace tvaru $\left(\begin{smallmatrix} c & -s \\ s & c \end{smallmatrix}\right)$, $c^2 + s^2 = 1$. (*Hint:* cv. 19.11 a cv. 22.49.)

Cv. 24.20 To, že má matice reálná vlastní čísla se někdy dá nahlédnou tak, že je podobná symetrické matici. Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, která je tridiagonální, tj. $a_{ij} = 0$ pro $|i - j| > 1$. Předpokládejme, že symetrické páry složek matice mají stejné znaménko, tedy $a_{i,i+1}a_{i+1,i} > 0$ pro $i = 1, \ldots, n-1$. Ukažte, že A je podobná symetrické matici skrze diagonální matici, tj. $DAD^{-1} = S$, kde D je diagonální a S symetrická.

Courantova–Fischerova věta

$$\lambda_1 = \max_{x:\|x\|_2=1} x^T Ax, \quad \lambda_n = \min_{x:\|x\|_2=1} x^T Ax.$$

Cv. 24.21 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické. Dokažte $\lambda_1(A + B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.

Cv. 24.22 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Dokažte, že $\lambda_1 \geq a_{ii} \geq \lambda_n$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

Cv. 24.23 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice, jejíž prvek a_{ii} zvětšíme o $\varepsilon > 0$.

(a) Zvětší se největší vlastní číslo λ_1? Případně jak noc se může zvýšit?

(b) Zvětší se nejmenší vlastní číslo λ_n? Případně jak noc se může zvýšit?

Cv. 24.24 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická matice, λ_1 její největší vlastní číslo, odpovídající vlastnímu vektoru x_1. Dokažte vztah pro druhé největší vlastní číslo

$$\lambda_2 = \max\{x^T Ax;\ \|x\|_2 = 1,\ x \perp x_1\}.$$

(*Hint:* Využijte vhodné formy spektrálního rozkladu A.)

Cv. 24.25 Uvažujme lineární zobrazení $x \mapsto Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jak moc může zobrazení prodloužit vektor x v eukleidovské normě? Uvažujme dva případy kdy A je obecná a kdy A je symetrická.

Cv. 24.26 V řeči vlastních čísel vyjádřete maximální hodnotu výrazu

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$$

pokud $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ musí splňovat $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ a $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. (*Hint:* cv. 24.24.)

Nezáporné a markovské matice

1. $A \geq 0 \;\Rightarrow\; \rho(A)$ je vlastní číslo a příslušný vlastní vektor je nezáporný.
2. $A > 0 \;\Rightarrow\; \rho(A) > 0$ je vlastní číslo (jediné dominantní), a příslušný vlastní vektor je kladný. Jinému vlastnímu číslu neodpovídá nezáporný vlastní vektor.

Cv. 24.27 Buď $A \geq 0$ a nechť $A^k > 0$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Co dokážete říct o vlastních číslech a vlastních vektorech matice A?

Cv. 24.28 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50% látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25% látky z druhé přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Cv. 24.29 Ve městě Matfizákově fungují tři lokální politické strany: Anarchisté (A), Bláhoví (B) a Cílevědomí (C). Volby se řídí následujícím pravidlem. Z voličů A volí opět tuto stranu 75% jejích voličů, ale k B přejde 5% a k C dokonce 20%. Z voličů B přejde k A rovných 20% a k C také 20%. Nakonec, z voličů C zůstane jen 80%, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi A a B. Jaké je rozdělení podpory stran za delší časový horizont?

Cv. 24.30 Uvažujme tři genotypy AA, Aa, aa. Křížíme-li AA s AA, tak se stejnou pravděpodobností dostaneme typ AA jako Aa. Křížíme-li AA s Aa, tak s poloviční pravděpodobností dostaneme Aa a se čtvrtinovými ostatní genotypy. Konečně, křížíme-li AA s aa, tak s poloviční pravděpodobností dostaneme Aa i aa. Je-li na začátku poměr genotypů vyrovnaný, jaký bude za čas, provádíme-li křížení pouze s genotypem AA?

Cv. 24.31 Dokažte část Perronovy věty: Pro každé $A > 0$ víme, že $\rho(A)$ je vlastním číslem násobnosti 1, a přísluší mu kladný vlastní vektor. Dokažte, že žádnému jinému vlastnímu číslu nepřísluší nezáporný vlastní vektor.

Cv. 24.32 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte takovou matici $A \geq 0$, že platí postupně vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,
(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,
(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

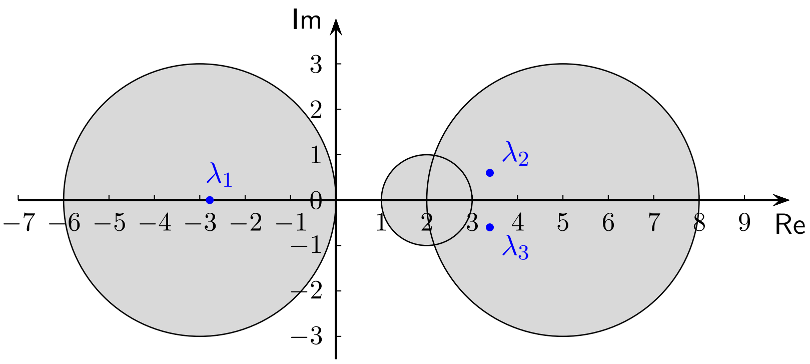
Cv. 24.33 Buď $A > 0$ a označme $r := \rho(A)$. Ukažte, že $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^k$ existuje a zjistěte její hodnost.

25 Odhady a metody na výpočet vlastních čísel

Ukázka 25.1 (Gerschgorinovy disky)**.** Pomocí Gerschgorinových disků spočítejte odhad vlastních čísel matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Z prvního řádku A určíme v komplexní rovině disk se středem v 2 a poloměrem 1, z druhého řádku disk se středem v 5 a poloměrem 3 a ze třetího řádku disk se středem v -3 a poloměrem 3, viz obrázek. Každé vlastní číslo tedy náleží do aspoň jednoho disku. Naopak to neplatí, což snadno ověříme spočítáním skutečných vlastních čísel $\lambda_1 = -2.78$, $\lambda_2 = 3.39 + 0.6\,i$, $\lambda_3 = 3.39 - 0.6\,i$.



□

Cvičení

Gerschgorinovy disky

Cv. 25.1 Aniž byste je počítali, rozhodněte, zda matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 25.2 Aniž byste ji upravovali, rozhodněte, zda matice je regulární

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cv. 25.3 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $(I_4 - A^{-1})^k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Cv. 25.4 Jaké je největší vlastní číslo markovské matice?

Cv. 25.5 Mějme matici A řádu $n = 11$ a předpokládejme, že nějaká metoda tuto matici upraví na podobnou B, jejíž mimodiagonální prvky jsou v absolutní hodnotě nanejvýš 10^{-10}. S jakou přesností diagonální prvky B aproximují vlastní čísla A?

Metody

Cv. 25.6 Aplikujte větu o deflaci dominantního vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cv. 25.7 Aplikujte větu o deflaci dominantního vlastního čísla na matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

26 Positivní (semi-)definitnost

Positivní definitnost:

1. $x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$,
2. vlastní čísla A jsou kladná,
3. $\exists U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti n: $A = U^T U$.

Positivní semi-definitnost:

1. $x^T A x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
2. vlastní čísla A jsou nezáporná,
3. $\exists U \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $A = U^T U$.

Ukázka 26.1 (Choleského rozklad)**.** Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Schematicky si můžeme znázornit postup takto

$$\begin{array}{c|c} & L^T \\ \hline L & A \end{array} \qquad \equiv \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nejprve určíme prvek L_{11} z vlastnosti $L_{1*}L_{*1}^T = A_{11}$, neboli $L_{11}^2 = A_{11} = 4$, tudíž $L_{11} = 2$ (hodnota $L_{11} = -2$ není přípustná, protože požadujeme, aby L měla kladnou diagonálu). Nyní spočítáme L_{21} z vlastnosti $L_{2*}L_{*1}^T = A_{21}$, neboli $L_{21}L_{11} = A_{21} = -2$, tudíž $L_{21} = -1$. Podobně spočítáme $L_{31} = 2$. V další fázi určíme prvky L ve druhém sloupci shora: $L_{22} = 2$, $L_{32} = 1$. A konečně ve třetím sloupci: $L_{33} = 1$. Takže máme hledaný rozklad:

$$\begin{array}{c|c} & L^T \\ \hline L & A \end{array} \qquad \equiv \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Cvičení

Cv. 26.1 Ukažte, že matice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je positivně semidefinitní, a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 26.2 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní. Ukažte, že $A + B$ je také positivně definitní.

Jak to bude se součtem positivně semidefinitních matic?

Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?

Jak to bude s násobkem positivně definitní matice?

Cv. 26.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je positivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou positivně definitní.

Jak to bude s positivní semidefinitností?

Cv. 26.4 Otestuje

(a) rekurentním vzorečkem,

> $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & \tilde{A} \end{pmatrix}$ je pos. def. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pos. def.

(b) Choleského rozkladem,

> $A = LL^T$, kde L je dolní trojúhelníková s kladnou diagonálou.

(c) Gaussovou eliminací,

> Odstupňovaný tvar A má kladnou diagonálou, použijeme-li jen přičítání násobku řádku s pivotem k jinému, co je pod ním.

(d) Sylvestrovým kriteriem

> $\det(A_1) > 0, \ldots, \det(A_n) > 0$, kde A_i vznikne z A odstraněním posledních $n - i$ řádků a sloupců.

positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.5 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Gaussovy eliminace, Sylvestrova kriteria pro positivní definitnost resp. Choleského rozkladu.

Cv. 26.6 Najděte matici, která má determinanty všech hlavních vedoucích matic nezáporné, ale přesto není positivně semidefinitní. Tzn., že přímočará analogie Sylvestrova kriteria pro positivně definitní matice nefunguje pro positivně semidefinitní.

Cv. 26.7 Najděte všechny symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, že A a $-A$ jsou positivně semidefinitní.

Cv. 26.8 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Cv. 26.9 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní a $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Dokažte dvěma způsoby, že $S^T AS$ je positivně definitní.

Cv. 26.10 Ukažte, že každá symetrická matice se dá zapsat jako rozdíl dvou positivně semidefinitních matic $A = P - R$. (Dá se jednoduše zobecnit na rozdíl dvou positivně definitních.)

Cv. 26.11 Určete, pro které $a \in \mathbb{R}$ je matice positivně definitní

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.12 Najděte Choleského rozklad matice

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.13 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.14 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.15 Nechť symetrická matice A není positivně definitní. To znamená, že Choleského rozklad zhavaruje, protože nedokáže spočítat hodnotu L_{ii} (musel by odmocnit nekladné číslo). Navrhněte způsob, jak najít $x \neq o$, pro který $x^T A x \leq 0$.

Cv. 26.16 Porovnejte počet aritmetických operací (nejhorší případ) potřebných k daným transformacím. Stačí řádově jako násobek rozměru n dané positivně definitní matice.

(a) Gaussova eliminace a Choleského rozklad,

(b) inverze matice klasickým způsobem a pomocí Choleského rozkladu.

Cv. 26.17 Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positivně definitní matice tvaru pásové matice o šířce k, tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna i, j taková, že $|i - j| > k$.

(a) Ukažte, že matice L z Choleského rozkladu $A = LL^T$ je také pásová matice o šířce k.

(b) Určete počet aritmetických operací k výpočtu L.

Cv. 26.18 Rozhodněte různými způsoby, zda matice řádu n je positivně definitní

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 26.19 Buď A positivně definitní. Dokažte, že $\langle x, y \rangle := x^T A y$ definuje reálný skalární součin.

Dovedete normu, indukovanou tímto skalárním součinem, vyjádřit pomocí eukleidovské normy?

Cv. 26.20 Buď A positivně semidefinitní a $a_{ii} = 0$ pro jisté i. Ukažte, že i-tý řádek a sloupec matice A jsou nulové.

Cv. 26.21 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní. Ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí: $x^T A x = 0 \;\Rightarrow\; Ax = o$.

Cv. 26.22 Ukažte, že A positivně semidefinitní právě tehdy, když platí implikace

$$x^T A x \le 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = 0.$$

Cv. 26.23 Ukažte, že A je positivně semidefinitní pokud pro její hlavní vedoucí matice platí $\det(A_1) > 0$, $\dots$, $\det(A_{n-1}) > 0$, $\det(A_n) \ge 0$.

Cv. 26.24 Buď A je positivně definitní a nechť R je matice v odstupňovaném tvaru, pokud v Gaussově eliminaci používáme jen operaci přičtení násobku řádku s pivotem k jinému pod ním. Nechť $A_1, \dots, A_n$ značí hlavní vedoucí podmatice. Dokažte, že pro pivoty platí vztah $r_{ii} = \frac{\det(A_i)}{\det(A_{i-1})}$, $i = 2, \dots, n$.

Cv. 26.25 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je positivně semidefinitní a hodnosti r. Ukažte, že A má hlavní podmatici řádu r, která je positivně definitní.

Cv. 26.26 Buď A positivně semidefinitní a $p(\lambda)$ polynom takový, že $p(\lambda) \ge 0$ pro $\lambda \ge 0$. Ukažte, že $p(A)$ je positivně semidefinitní.

Cv. 26.27 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Ukažte, že AB je diagonalizovatelná.

Cv. 26.28 Ukažte, že každá diagonalizovatelná matice s reálnými vlastními čísly se dá vyjádřit jako součin positivně definitní a symetrické matice.

Cv. 26.29 Pro positivně semidefinitní matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dokažte $\sqrt[n]{\det(A)} \le \frac{1}{n}\,\mathrm{trace}(A)$.

Cv. 26.30 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické a $\lambda_{\min}(A) > \lambda_{\max}(B)$. Dokažte, že $A - B$ je positivně definitní.

Cv. 26.31 Buď A symetrická matice jejíž vlastní čísla jsou větší než 1. Ukažte, že $A - A^{-1}$ je positivně definitní.

Cv. 26.32 Dokažte, že symetrická matice v blokovém tvaru $\left(\begin{smallmatrix} A & B^T \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$ je positivně definitní právě tehdy, když obě matice A a $C - BA^{-1}B$ jsou positivně definitní. (Jedná se vlastně o zobecnění rekurentního vzorečku.)

Cv. 26.33 Ukažte, že positivně semidefinitní odmocnina z positivně semidefinitní matice je jednoznačná.

*Cv. 26.34 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní. Ukažte, že $A_{ii}(A^{-1})_{ii} \ge 1$, $i = 1, \dots, n$. (*Hint:* Cauchyho–Schwarzova nerovnost.)

Cv. 26.35 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a $b \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že následující jsou ekvivalentní:

(a) A je positivně semidefinitní na podprostoru $\mathrm{Ker}(b^T)$, to jest $x^T A x \ge 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ taková, že $b^T x = 0$.

(b) Matice UAU má nezáporná vlastní čísla, kde U je matice projekce na $\mathrm{Ker}(b^T)$.

Poznámka. Matice UAU reprezentuje zobrazení $x \mapsto Ax$ když se omezíme na podprostor $\mathrm{Ker}(b^T)$.

*(c) Existuje $\alpha > 0$ takové, že $A + \alpha b b^T$ je positivně semidefinitní.

Cv. 26.36 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relace $\prec$ a $\preceq$ předpisem $A \prec B$ pokud $B - A$ je positivně definitní a $A \preceq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní.

(a) Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání.

(b) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda $0 \prec A^{-1}$.

(c) Nechť $0 \prec A$. Rozhodněte, zda $2I_n \prec A + A^{-1}$.

(d) Nechť $A \preceq B$. Rozhodněte, zda $U^T AU \preceq U^T BU$.

(e) Nechť $0 \prec A, B$. Rozhodněte, zda $0 \prec AB + BA$.

(f) Nechť $0 \preceq A \preceq B$. Rozhodněte, zda $A^2 \preceq B^2$.

*(g) Nechť $0 \prec A \preceq B$. Rozhodněte, zda $B^{-1} \preceq A^{-1}$.

*(h) Nechť $0 \prec A \preceq B$. Rozhodněte, zda $\sqrt{A} \preceq \sqrt{B}$.

*Cv. 26.37 Stopa a positivní semidefinitnost (*Hint:* viz cv. 3.32 a cv. 16.37).

(a) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní a $\operatorname{trace}(AB) = 0$. Ukažte, že pak $AB = 0$.

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že A je positivně semidefinitní právě tehdy, když $\operatorname{trace}(AX) \geq 0$ pro všechny positivně semidefinitní $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

27 Bilineární a kvadratické formy

Bilineární forma: $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{T},\ \forall u, v, w \in V,$$
$$b(w, \alpha u + \beta v) = \alpha b(w, u) + \beta b(w, v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{T},\ \forall u, v, w \in V.$$

Matice A formy b vhledem k bázi $u_1, \ldots, u_n$: $a_{ij} = b(u_i, u_j)$.

Kvadratická forma: $f(u) = b(u, u)$.

Ukázka 27.1 (Bilineární forma)**.** Uvažme bilineární formu na $\mathbb{R}^2$

$$b(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 4x_2 y_1 + 10x_2 y_2.$$

Najděte maticové vyjádření formy vzhledem ke kanonické bázi.

Řešení: Protože matice A formy je definovaná $a_{ij} = b(e_i, e_j)$, dostáváme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix},$$

tedy

$$b(x, y) = x^T A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici lze nahlédnout i přímo z rozpisu. □

Ukázka 27.2 (Kvadratická forma)**.** Uvažme kvadratickou formu na $\mathbb{R}^2$

$$f(x) = x_1^2 + 6x_1 x_2 + 10x_2^2.$$

Najděte symetrickou bilineární formu indukující f a maticové vyjádření forem.

Řešení: Formu si vyjádříme

$$f(x) = x_1^2 + 6x_1 x_2 + 10x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nyní máme matici vzhledem ke kanonické bázi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix},$$

a symetrická bilineární forma indukující f je $b(x, y) = x^T A y$. □

Ukázka 27.3 (Diagonalizace kvadratické formy)**.** Určete signaturu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Na matici aplikujeme střídavě elementární řádkové a analogické sloupcové úpravy a převedeme na diagonální tvar takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice má tudíž signaturu dvě jedničky a jedna nula, takže je positivně semidefinitní. □

Ukázka 27.4 (Diagonalizace kvadratické formy a polární báze)**.** Najděte bázi, vůči níž je diagonální matice kvadratické formy $f(x) = x^T Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Na matici A aplikujeme střídavě elementární řádkové a analogické sloupcové úpravy a převedeme na diagonální tvar, souhrnně $S^T AS = I_n$. Polární báze je skrytá ve sloupcích matice S, která představuje matici přechodu od polární do kanonické báze. Matici S lze získat tak, že současně s úpravami matice A aplikujeme na jednotkovou matici I_n pouze sloupcové úpravy:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Hledaná báze je tvořená posledními třemi sloupečky, tedy jsou to vektory $(1, 0, 0)^T$, $(-2, 1, 0)^T$, $(-1, 1, 1)^T$.
$\square$

Cvičení

Bilineární a kvadratické formy a jejich matice

Cv. 27.1 Ukažte, že pro každou bilineární formu b platí $b(u, o) = b(o, u) = 0$.

Cv. 27.2 Je následující bilineární formou $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

(a) $b(x, y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2 y_1$,

(b) $b(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$,

(c) $b(x, y) = x_1 y_2 + x_2$.

Cv. 27.3 Je bilineární formou zobrazení $b\colon \mathbb{R}^{m\times p} \times \mathbb{R}^{p\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ definované $b(A, B) = AB$?

Cv. 27.4 Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a $f_1, f_2\colon V \to \mathbb{T}$ lineární zobrazení. Ukažte, že

(a) $b(x, y) \coloneqq f_1(x) \cdot f_2(y)$ je bilineární forma,

(b) $f(x) \coloneqq f_1(x) \cdot f_2(x)$ je kvadratická forma.

Cv. 27.5 Rozhodněte, zda následující bilineární formy na $\mathbb{R}^3$ jsou symetrické. Pokud ne, najděte protipříklad.

(a) $b(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - x_3 y_3$

(b) $b(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_3 + 2x_2 y_2 - x_3 y_1$

Cv. 27.6 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_3 y_2$

(b) $b(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Jak souvisí symetrie bilineární formy a symetrie její matice?

Cv. 27.7 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3$$

vzhledem ke kanonické bázi. Dále, najděte symetrickou bilineární formu $b(x, y)$, která indukuje $f(x)$.

Cv. 27.8 Najděte kvadratickou formu f nad $\mathbb{R}^2$ takovou, aby $f((2, 1)^T) = 7$, a navíc

(a) f byla jakákoli,

(b) f byla positivně definitní,

(c) f byla indefinitní.

Cv. 27.9 Najděte kvadratickou formu f nad $\mathbb{R}^2$ takovou, aby

(a) $f((1, 0)^T) = 1$, $f((0, 1)^T) = 3$, $f((2, -3)^T) = 7$,

(b) $f((1, 0)^T) = 2$, $f((1, 1)^T) = 2$, $f((1, 2)^T) = -2$.

Cv. 27.10 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$$

vzhledem ke kanonické bázi a postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$.

Cv. 27.11 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 27.12 Nechť kvadratická forma f má vzhledem k bázi $B = \{(0, 0, 1)^T, (0, 1, 2)^T, (1, 2, 3)^T\}$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Najděte analytické vyjádření f.

Cv. 27.13 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p, q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,

(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1 + x,\ (1 - x)^2\}$,

(c) vyčíslete $b(1 - x, x^2 - 2x + 2)$ dvěma způsoby,

(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Cv. 27.14 Buď $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$ bilineární forma a těleso $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2. Pak b se nazývá *antisymetrická* pokud splňuje $b(u, v) = -b(v, u)$ pro každé $u, v \in V$.

(a) Ukažte, že každá bilineární forma lze rozložit na součet symetrické a antisymetrické.

(b) Aplikujte postup na bilineární formu $b(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 4x_1y_3 - 6x_2y_3$, a najděte matice všech forem vzhledem ke kanonické bázi.

(c) Buď $f(u) = b(u, u)$ kvadratická forma indukovaná antisymetrickou bilineární formou b. Ukažte, že f je nulová.

Cv. 27.15 Vektorový prostor, tvořený formami.

(a) Ukažte, že bilineární formy, symetrické bilineární formy a antisymetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.

(b) Ukažte, že prostor bilineárních forem je direktním součtem prostoru symetrických a antisymetrických bilineárních forem.

(c) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

Cv. 27.16 Buď V vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ charakteristiky různé od 2. Ukažte, že každá symetrická bilineární forma $b\colon V^2 \to \mathbb{T}$ je určena hodnotami $b(v,v)$, $v \in V$. To v důsledku znamená, že ze znalosti kvadratické formy jsme schopni zrekonstruovat jednoznačnou symetrickou bilineární formu, která ji indukuje.

Cv. 27.17 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^T A x = x^T B x$ pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda $A = B$.

(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

(c) Najděte matici kvadratické formy nad $\mathbb{Z}_2$ vzhledem ke kanonické bázi: $f(x) = x_1^2 + x_2^2$.

(d) Rozhodněte, zda kvadratická forma je jednoznačně určena obrazy báze.

Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 27.18 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 27.19 Diagonalizujte kvadratickou formu s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Cv. 27.20 Diagonalizujte kvadratickou formu s maticí

$$B = \begin{pmatrix} I_m & A \\ A^T & 0_n \end{pmatrix},$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má hodnost n.

Cv. 27.21 Rozhodněte, zda matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definovaná $a_{ij} := \min\{i,j\}$ je positivně definitní.

Cv. 27.22 Uvažme relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci pokud existuje regulární S tak, že $B = S^T A S$.

(a) Jaké vlastnosti má relace kongruence?

(b) Kolik existuje tříd ekvivalence?

Cv. 27.23 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T A x$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Cv. 27.24 Ukažte, že daná rovnice popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).

(a) $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$,

(b) $13x^2 + 10xy + 13y^2 = 72$.

Cv. 27.25 Mějme n pozorování $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Průměr je definován jako $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ a rozptyl jako $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Ukažte, že σ^2 je kvadratická forma, najděte její matici a určete signaturu.

Cv. 27.26 Ukažte, že pro každou reálnou kvadratickou formu existuje matice A této formy, která je blokově diagonální s prvky 0, 1 a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, nebo $-A$ má tuto vlastnost.

Cv. 27.27 Připomeňme, že matice A je antisymetrická pokud $A^T = -A$.

(a) Buď A antisymetrická. Dokažte, že A^2 je symetrická negativně semidefinitní.

(b) Buď A antisymetrická. Dokažte, že $\operatorname{trace}(A^2) \le 0$.

(c) Ukažte, že $x^T A x = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když A je antisymetrická.

(d) Ukažte, že antisymetrická matice A lze vyjádřit ve tvaru SJS^T, kde S je regulární a J blokově diagonální a její bloky jsou buď nuly nebo mají tvar $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(e) Ukažte, že hodnost antisymetrické matice je sudé číslo.

Cv. 27.28 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní a definujme $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ po složkách $b_{ij} := a_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}}$. Ukažte, že B je positivně definitní, na diagonále má jedničky a mimo diagonálu má čísla v absolutní hodnotě menší než 1.

Cv. 27.29 Platí Sylvestrův zákon setrvačnosti na komplexním prostoru?

Cv. 27.30 Ukažte, že pro symetrické $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stejné hodnosti existuje $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taková, že $S^T A S = B$.

Cv. 27.31 Uvažujme kvadratické formy na $\mathbb{R}^n$.

(a) Ukažte, že formy tvoří vektorový prostor.

(b) Určete dimenzi tohoto prostoru.

Cv. 27.32 Zvolte si kvadratickou formu f nad $\mathbb{R}^4$ se signaturou $(1, 1, -1, -1)$ a najděte podprostor $V \Subset \mathbb{R}^4$ dimenze 2 splňující $f(x) = 0$ pro všechna $x \in V$.

Cv. 27.33 Buď $f\colon V \to \mathbb{R}$ kvadratická forma a $h\colon V \to V$ isomorfismus.

(a) Ukažte, že $f \circ h$ je kvadratická forma na V.

(b) Ukažte, že obě kvadratické formy f, $f \circ h$ mají stejnou signaturu.

Cv. 27.34 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Ukažte, že AB má stejný počet reálných kladných, záporných a nulových vlastních čísel jako B (srov. cv. 26.27).

Dále ukažte, že každá diagonalizovatelná matice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s reálnými vlastními čísly se dá vyjádřit jako součin positivně definitní a symetrické matice.

Cv. 27.35 Simultánní diagonalizovatelnost.

(a) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní a $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická. Ukažte, že existuje reálná $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že obě matice $C^T A C$ a $C^T B C$ jsou diagonální. Tudíž A, B můžeme simultánně diagonalizovat. (*Hint:* Odmocnina z A.)

(b) Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní. Ukažte, že $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

*Cv. 27.36 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická a A_i nechť značí levou horní podmatici A velikosti i, tj. vznikne z A odstraněním posledních $n - i$ řádků a sloupců. Předpokládejme, že $\det(A_i) \neq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Ukažte, že signatura A neobsahuje nuly a počet -1 je roven počtu změn znaménka posloupnosti $\det(A_1), \ldots, \det(A_n)$. (*Hint:* Analyzujte vliv elementárních řádkových a sloupcových úprav.)

28 Maticové rozklady (QR rozklad a SVD)

Ukázka 28.1 (QR rozklad)**.** Najděte QR rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve si sestavíme Householderovu matici, která převede první sloupec matice A na vektor $(\|A_{*1}\|, 0, 0)^T = (5, 0, 0)^T$. Definujme

$$u_1 \coloneqq A_{*1} - \|A_{*1}\| e_1 = (-5, 3, 4)^T,$$

pak hledanou maticí je

$$Q_1 \coloneqq I_3 - 2\frac{u_1 u_1^T}{u_1^T u_1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ 15 & 16 & -12 \\ 20 & -12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Po přenásobení matice A dostaneme

$$R_1 \coloneqq Q_1 A = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -25 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tedy skutečně se eliminují všechny prvky pod prvním pivotem.

Podobně postupujeme v druhé iteraci pro podmatici

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -25 & -10 \end{pmatrix}.$$

Definujme

$$u_2 \coloneqq (0, -25)^T - 25 e_1 = (-25, -25)^T,$$

a sestavíme se Householderovu matici

$$Q_2 = I_2 - 2\frac{u_2 u_2^T}{u_2^T u_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přenásobením dostáváme

$$R_2 \coloneqq Q_1 A_1 = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Teď už můžeme iterace ukončit, protože R_2 už je horní trojúhelníková matice s nezápornou diagonálou. Nyní dopočítáme kýžený QR rozklad $A = QR$ takto

$$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 15 & 12 & -16 \\ 20 & -9 & 12 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Matice Q tedy vznikla součinem všech Householderových matic použitých během iterací, s tím, že je musíme rozšířit na rozměr $n \times n$. Matice R zase vznikla z R_1 nahražením bloku vpravo dole maticí R_2; ve vyšších dimenzích by se nahrazovalo postupně. □

Cvičení

Householderova matice

Householderova matice: $H(u) = I_n - \frac{2}{u^T u} uu^T$, $u \neq o$.
Householderova transformace $y = H(x-y)x$, kde $x \neq y$, $\|x\|_2 = \|y\|_2$.

Cv. 28.1 Ukažte, že každá Householderova matice je tvaru $I_n - 2vv^T$, kde $\|v\|_2 = 1$.

Cv. 28.2 Ukažte, že každá Householderova matice H splňuje $H^{-1} = H$.

Cv. 28.3 Doplnění na ortonormální bázi.

(a) Buď $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$. Sestrojte ortogonální matici Q s prvním sloupcem rovným u. (Jinými slovy: doplňte u na ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$.)

(b) Doplňte $u = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$ na ortonormální bázi $\mathbb{R}^4$.

Cv. 28.4 Nechť $H(u)x = x$ pro jisté $u, x \in \mathbb{R}^n$ Dokažte $u \perp x$.

Cv. 28.5 Určete vlastní čísla, vlastní vektory a determinant $H(u)$.

QR rozklad

Cv. 28.6 Najděte netriviální příklad, kdy QR rozklad není jednoznačný.

Cv. 28.7 Nechť $A = QR$ je QR rozklad. Určete QR rozklad matice αA pro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cv. 28.8 Sestrojte QR rozklady matic:

(a) e_i,

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$,

Cv. 28.9 Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) najděte QR rozklad,

(b) najděte ortonormální bázi $\mathcal{S}(A)$,

(c) najděte matici projekce do $\mathcal{S}(A)$.

Cv. 28.10 Blokový rozklad:

(a) Pokud $A_1 = Q_1R_1$ a $A_2 = Q_2R_2$ jsou QR rozklady, najděte QR rozklad $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Jaké musí mít matice A_1, A_2 rozměry?

(b) Pokud $A_1 = Q_1R_1$ a $A_2 = Q_2R_2$ jsou QR rozklady, najděte QR rozklad $\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.

Cv. 28.11 Pomocí QR rozkladu (nejlépe jen jednoho) vhodné matice popište všechna řešení soustavy $Ax = b$, kde A má lineárně nezávislé řádky.

Cv. 28.12 Určete ortonormální bázi $\mathrm{Ker}(1,2,2,4)$.

Cv. 28.13 Za použití software na pomocné výpočty určete:

(a) ortonormální bázi $\mathcal{S}(A)$ pro

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix},$$

(b) projekci $v = (3,3,3)^T$ do $\mathcal{S}(A)$.

Cv. 28.14 Pomocí QR rozkladu dokažte větu o Choleského rozkladu (nebo její variantu či zobecnění) pro matici tvaru $A = B^T B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

SVD rozklad

$$\begin{aligned} \text{SVD rozklad: } & A = U\Sigma V^T, \text{ kde } S = \operatorname{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r,0,\ldots,0), \\ & U, V \text{ ortogonální}, \\ \text{Redukovaný SVD rozklad: } & A = U_1 S\, V_1^T \text{ kde } S = \operatorname{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r), \\ \text{Pseudoinverze: } & A^\dagger = V_1 S^{-1} U_1^T. \end{aligned}$$

Cv. 28.15 Určete singulární čísla matic:

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $a = (a_1,\ldots,a_n)^T$,

(d) $a = (a_1,\ldots,a_n)$,

(e) $a = \operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$,

(f) symetrické matice s vlastními čísly $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

(g) positivně definitní matice s vlastními čísly $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

(h) $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Cv. 28.16 Buď $A = xy^T$, kde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Určete $\sigma_1(A)$, $\rho(A)$ a porovnejte je. Kdy se rovnají?

Cv. 28.17 Ukažte, že matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má nulové singulární číslo právě tehdy, když má nulové vlastní číslo.

Cv. 28.18 Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má singulární čísla $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Dokažte:

(a) $\sigma_n \leq \|A_{i*}\|_2$ pro libovolné $i = 1,\ldots,n$.

(b) $\rho(A) \leq \sigma_1$.

Cv. 28.19 Nechť všechna singulární čísla matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou stejná. Ukažte, že A je násobek ortogonální matice.

Cv. 28.20 Nechť regulární matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má singulární čísla $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Najděte singulární čísla matic A^T, A^{-1} a $\operatorname{adj}(A)$.

Cv. 28.21 Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má singulární čísla $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$. Ukažte, že matice $\begin{pmatrix} 0_m & A \\ A^T & 0_n \end{pmatrix}$ má za nenulová vlastní čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_r, -\sigma_1, \ldots, -\sigma_r$.

Cv. 28.22 Víme, že matice AB a BA mají stejná (nenulová) vlastní čísla. Co singulární čísla?

Cv. 28.23 Najděte SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, která má ve sloupcích ortogonální vektory délky $d_1, \ldots, d_n > 0$.

Cv. 28.24 *Polární rozklad* matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je rozklad $A = PQ$, kde P je positivně semidefinitní a Q ortogonální.

(a) Ukažte, že každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má polární rozklad.
(b) Ukažte, že matice P je jednoznačně určená tak, že vyjádříte $P = \sqrt{AA^T}$.
(c) Zobecněte tvrzení na obdélníkové matice: Každá matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, má rozklad $A = PQ$, kde P je positivně semidefinitní a Q má ortogonální sloupce.
(d) Najděte polární rozklad matice $a \in \mathbb{R}^n$.
(e) Ukažte, že polární rozklad a SVD rozklad jsou ekvivalentní v tom smyslu, že jeden lze snadno odvodit z druhého.

Pseudoinverze

Cv. 28.25 Určete SVD rozklad a pseudoinverzi pro

(a) $A = 0_{m,n}$,
(b) $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$,
(c) $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$,
(d) matici A s ortonormálními sloupci.

Cv. 28.26 Dokažte:

(a) $AA^\dagger$ je symetrická,
(b) $A = (A^\dagger)^T A^T A$,

Cv. 28.27 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ukažte, že

(a) $AA^\dagger$ je matice projekce do $\mathcal{S}(A)$,
(b) $A^\dagger A$ je matice projekce do $\mathcal{R}(A)$,
(c) $I_n - A^\dagger A$ je matice projekce do $\operatorname{Ker}(A)$,
(d) $\operatorname{Ker}(A) = \mathcal{S}(I_n - A^\dagger A)$.

Cv. 28.28 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ a pro soustavu $Ax = b$ ukažte, že

(a) má (aspoň jedno) řešení právě tehdy, když $AA^\dagger b = b$,
(b) má nanejvýš jedno řešení právě tehdy, když $AA^\dagger = I_n$,
(c) má právě jedno řešení právě tehdy, když $AA^\dagger b = b$ a $AA^\dagger = I_n$,
(d) má-li aspoň jedno řešení, pak všechna řešení jsou vyjádřit jako $A^\dagger b + y - A^\dagger Ay$, kde $y \in \mathbb{R}^n$ je libovolné.

Cv. 28.29 Ukažte, že pokud platí $C = AX = YB$, potom existuje matice Z taková, že $C = AZB$. (Jinými slovy, pokud sloupce matice C jsou z prostoru $\mathcal{S}(A)$ a řádky z prostoru $\mathcal{R}(B)$, pak matici C můžeme vyjádřit naráz jako kombinaci sloupců A i řádků B.)

*Cv. 28.30 Ukažte, že maticová soustava rovnic $AXB = C$ s libovolnými maticemi vhodných rozměrů má řešení právě tehdy, když $AA^\dagger CB^\dagger B = C$. Navíc, množina řešení je tvaru $X = A^\dagger CB^\dagger + Y - A^\dagger AYBB^\dagger$, kde Y je libovolná matice příslušných rozměrů.

Maticové normy

Cv. 28.31 Proč není spektrální poloměr maticovou normou?

Cv. 28.32 Dokažte, že pro P matici projekce do netriviálního vlastního podprostoru platí $\|P\|_2 = \|I-P\|_2$.

Cv. 28.33 Ukažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je $\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\|_2$.

Cv. 28.34 Ukažte, že Frobeniova a p-norma jsou skutečně maticovými normami.

Cv. 28.35 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte $\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2$ a ukažte, že meze nelze zlepšit.

Cv. 28.36 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární a λ její vlastní číslo. Dokažte $\|A^{-1}\|_2^{-1} \le |\lambda| \le \|A\|_2$.

Cv. 28.37 Ukažte, že pro Frobeniovu a maticovou 2-normu platí $\|A\| = \|A^T\|$.

Platí tvrzení i pro jiné normy?

Cv. 28.38 Ukažte, že pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje diagonalizovatelná matice $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $\|A - A'\|_2 \le \varepsilon$. (Tedy libovolně blízko k matici se nachází diagonalizovatelná matice.)

Cv. 28.39 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokažte, že ze všech symetrických matic je matice $\frac{1}{2}(A+A^T)$ nejblíže k matici A ve Frobeniově a maticové 2-normě.

Cv. 28.40 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $Y = U\Sigma V^T$ její SVD rozklad. Dokažte, že ze všech ortogonálních je matice UV^T nejblíže k matici A ve Frobeniově a maticové 2-normě.

29 Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování Opakování

V této sekci uvádíme rekapitulační úlohy pro předešlé sekce 16–28.

Cv. 29.1 Pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$ dokažte poučku $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y.

Cv. 29.2 Buďte U, V dva reálné vektorové prostory se skalárním součinem. Lineární zobrazení $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to U$ jsou *navzájem adjungované* pokud pro všechna $u \in U$ a $v \in V$ platí $\langle f(u), v\rangle = \langle u, g(v)\rangle$. Zde přirozeně $\langle f(u), v\rangle$ je skalární součin ve V a $\langle u, g(v)\rangle$ zase v U. Ukažte:

(a) Ke každému lineárnímu zobrazení $f\colon U \to V$ existuje nejvýše jedno adjungované zobrazení $g\colon V \to U$.

(b) Uvažujme lineární zobrazení $f_1, f_2\colon U \to V$ a $g_1, g_2\colon V \to U$. Jsou-li f_1 a g_1 adjungované a f_2 a g_2 adjungované, pak $f_1 + f_2$ a $g_1 + g_2$ jsou také adjungované.

(c) Jsou-li $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to U$ adjungované, pak αf a αg jsou adjungované pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Jsou-li $f_1\colon U \to V$ a $g_1\colon V \to U$ adjungované, a jsou-li $f_2\colon V \to W$ a $g_2\colon W \to V$ adjungované, pak $f_2 \circ f_1$ a $g_1 \circ g_2$ jsou také adjungované.

(e) Buďte $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to U$ lineární zobrazení a A resp. B jejich matice vzhledem k ortonormálním bázím B_1, B_2 resp. B_2, B_1. Pak f, g jsou navzájem adjungované právě tehdy, když $A = B^T$.

(f) Jsou-li U, V konečně generované, pak pro každé lineární zobrazení $f\colon U \to V$ existuje právě jediné s ním adjungované.

(g) Buďte U, V konečně generované a $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak jádro adjungovaného zobrazení tvoří $f(U)^\perp$ a obraz tvoří $\mathrm{Ker}(f)^\perp$.

Cv. 29.3 Slunce zrovna vycházelo nad hory, když šíp vystřelený indiánem protnul sluneční kotouč a stín šípu se promítnul na starou bizoní kůži. Určete, kolikrát byl stín menší než vlastní šíp, pokud víme, že slunce se nacházelo ve směru vektoru $(3, 2, 1)^T$, šíp byl vystřelený z bodu $(1, 2, 3)^T$ po přímce se směrnicí $(5, 5, 5)^T$ a bizoní kůže se sušila kolmo na sluneční paprsky.

Cv. 29.4 Ukažte, že ortogonální matice řádu 2 musí být tvaru $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ nebo $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$, kde $a^2 + b^2 = 1$.

Cv. 29.5 Najděte lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ takové, aby $\det(f(X)) = 211 \det(X)$ a navíc:

(a) $f(I_n) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je dané,

(b) $f(A) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou dané a A regulární,

(c) najděte co největší třídu takových lineárních zobrazení.

Cv. 29.6 Pro lineární zobrazení $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ukažte

(a) $\mathcal{R}(A)$ je isomorfní s $f(\mathbb{R}^n)$,

(b) $\mathcal{R}(A)$ je isomorfní s $f(\mathcal{R}(A))$.
(Tudíž $f(x)$ omezeno na $\mathcal{R}(A)$ tvoří isomorfismus.)

Cv. 29.7 Dokažte, že v každém kroku Gaussovy–Jordanovy eliminace se každý nenulový prvek matice dá vyjádřit buď jako determinant, nebo podíl dvou determinantů podmatic původní matice.

Cv. 29.8 Pro jaké hodnoty x je matice A regulární?

$$A = \begin{pmatrix} x + a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x + a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & x + a_n \end{pmatrix}.$$

Cv. 29.9 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelná a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ její vlastní čísla (bez násobností). Ukažte, že existují matice $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující najednou všechny následující vlastnosti

(a) $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$.
(b) $A_i^2 = A_i$,
(c) $A_i A_j = 0_{n,n}$,
(d) $\sum_{i=1}^k A_i = I_n$,
(e) $\operatorname{rank}(A_i) =$ násobnost vlastního čísla λ_i.

Cv. 29.10 Matice sousednosti $A_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (neorientovaného) grafu $G = (V, E)$ je definována jako $(A_G)_{ij} = 1$ pokud $\{i, j\} \in E$ a $(A_G)_{ij} = 0$ jinak (srov. cv. 15.22).

(a) Určete vlastní čísla a vektory matice sousednosti úplného grafu K_n.
(b) Určete vlastní čísla a vektory matice sousednosti úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$.
(c) Určete spektrální poloměr matice sousednosti cyklu C_n.
(d) Určete spektrální poloměr matice sousednosti hyperkrychle Q_n. Ta je definovaná tak, že vrcholy tvoří binární vektory délky n a hrany vedou mezi vrcholy lišící se v právě jednom bitu.
(e) Určete největší vlastní číslo matice sousednosti d-regulárního grafu (všechny stupně rovny d).
(f) Uvažme d-regulární graf G. Dokažte, že G je bipartitní právě tehdy, když nejmenší vlastní číslo A_G je rovno $-d$.
(g) Uvažme d-regulární graf G. Dokažte, že G je nesouvislý právě tehdy, když druhé největší vlastní číslo A_G je rovno d.

Cv. 29.11 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti m.

(a) Spočítejte projekci do $\operatorname{Ker}(A)$.
(b) Dokažte, že projekce se dá ekvivalentně spočítat jako u-složka řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} I_n & A^T \\ A & 0_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 29.12 Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně definitní a $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti m. Dokažte, že matice $\begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$ je regulární.

Cv. 29.13 Buď $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positivně semidefinitní a $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hodnosti m. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní s regularitou matice $M = \begin{pmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

(a) $Ax = o,\ x \neq o \ \Rightarrow\ x^T P x > 0$.
(b) $\operatorname{Ker}(P) \cap \operatorname{Ker}(A) = \{o\}$.
(c) $F^T P F$ je positivně definitní, kde $F \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$ je matice splňující $\mathcal{R}(F) = \operatorname{Ker}(A)$.
(d) $P + A^T R A$ je positivně definitní pro nějakou positivně semidefinitní matici R.

Dále ukažte, že je-li M regulární, pak má n kladných a m záporných vlastních čísel.

Cv. 29.14 Buďte $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrické a A positivně definitní. Ukažte, že existuje matice R taková, že $RAR^T = I_n$ a $R^T B R$ je diagonální (tedy tak trochu diagonalizujeme obě matice najednou!).

Cv. 29.15 Buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $w_1, \dots, w_m \in V$. Připomeňme, že *Gramova matice* $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je definovaná $G_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$. Ukažte:

(a) G je positivně semidefinitní.

(b) Jsou vektory $w_1, \dots, w_m$ lineárně nezávislé, tak G je positivně definitní.

(c) $\operatorname{rank}(G) = \dim(\operatorname{span}\{w_1, \dots, w_m\})$.

(d) Buď $V = \mathbb{R}^n$ a $W \coloneqq (w_1 \mid \cdots \mid w_m)$. Pak existuje positivně definitní matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $G = W^T A W$.

Cv. 29.16 (a) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická a B ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^n$, skládající se z vlastních vektorů matice A. Vyjádřete hodnotu kvadratické formy $x^T A x$ vzhledem k souřadnicím $[x]_B$.

(b) Adaptujte předchozí pro případ, kdy A je positivně definitní a B je libovolná ortonormální báze při skalárním součinu $\langle x, y \rangle := x^T A y$.

30 Humor a zajímavosti

Humor

Cv. 30.1 Doplňte poslední řádek:

Nemám rád permutace.
Permutace nemám rád.
Rád nemám permutace.
Nemám permutace rád.
Rád permutace nemám.
...

Cv. 30.2 Proč je sbírka úloh z lineární algebry nešťastná?

Cv. 30.3 Co je to dilemma?

Cv. 30.4 Zjistěte, proč má Turecko na 10 lirové bankovce napsáno

$$Arf(q) = \sum_{i=1}^{n} q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}_2 \ \forall a_i, b_i, \ i = 1, \dots, n$$

a co to znamená.

Cv. 30.5 *(Novoroční)* Vyjádřete neznámé matice X, Y, Z z následujících vztahů. Všechny matice jsou regulární a $Y, \acute{Y}$ jsou různé matice.

(a) $B^T N \acute{Y} X^{-1} \check{S} = (S^{-1}B)^T (\check{T}A)^{-1}$,
(b) $(NO)^{-1} Y (A\acute{Y})^{-1} = VA^{-1}$,
(c) $(Z^T)^{-1}(CK)^T = (R^{-1})^T (O^T)^{-1} C^T$,

Zajímavosti

Cv. 30.6 Buď $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak $C = AB - BA$ pro nějaké $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ právě tehdy, když $\mathrm{trace}(C) = 0$.

Cv. 30.7 Buď $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pak $C = ABA^{-1}B^{-1}$ pro nějaké regulární $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ právě tehdy, když $\det(C) = 1$.

Cv. 30.8 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Pak $C = AX - YB$ pro nějaké $X \in \mathbb{R}^{m\times q}$ a $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ právě tehdy, když $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Cv. 30.9 (Frobenius, 1897) Každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující $\det(f(X)) = c\det(X)$ pro dané $c \neq 0$ musí být buď tvaru $f(X) = AXB$ nebo $f(X) = AX^TB$, kde $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou pevné matice takové, že $\det(AB) = c$.

Cv. 30.10 Každá matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s kladným determinantem se dá vyjádřit jako součin pěti positivně definitních matic. (Zkuste to pro $A = -I_2$.)

31 Otevřené otázky

Cv. 31.1 Je každá kladná matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalizovatelná (z pohledu teorie vlastních čísel)?

Řešení

Část I

Cv. 1.3 Ano.

Cv. 1.10 Ano.

Cv. 1.13 Rovina $x + z = 2$.

Cv. 1.14 2.

Cv. 1.15 $Q = [2, 5, -3]$.

Cv. 2.3 $y = x^2 - 2x + 3$.

Cv. 2.4 $f(x) = \frac{12}{x+2}$.

Cv. 2.5 $(-1/2, -5/2)$.

Cv. 2.7 $(10, 20, 30, 40)$.

Cv. 2.11 (a) $(1, 0, 2)$, (b) $(1, 2, 3)$.

Cv. 2.12 (a) $\emptyset$, (b) $(2, -1, -1)$,
(c) $(0, 0, 1) + t(1, -2, 0)$.

Cv. 2.13 $(2, 1, 0) + t(-1, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Cv. 2.14 Jen (a), (b).

Cv. 2.15 15.

Cv. 2.19 (a) $\left(\frac{1000}{1001}, -\frac{1000}{1001}\right)$, (b) $(0, -1)$, (c) $(1, -1)$.

Cv. 2.24 Ano.

Cv. 2.25 $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 3)$, $(4, -1, -1)$.

Cv. 2.26 $(-1, 2)$.

Cv. 2.27 Nemá řešení.

Cv. 2.28 (a) $x = 1/3$, $y = 6$, $z = 1/2$,
(b) $x = 16/9$, $y = 3/2$, $z = 2$.

Cv. 2.29 (b) pro $a = -1 : \emptyset$,
pro $a = 1 : [1, 0] + t(-1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$,
pro $a \neq \pm 1 : \frac{1}{1+a}(1 + a + a^2, -a)$,
(c) pro $a = 3/4 : \emptyset$,
jinak: $\frac{1}{3-4a}(3a^2 + a + 1, 1 - 3a^2)$,
(d) pro $a = -1 : \emptyset$,
pro $a = 0 : [1, 0, 0] + t(0, 1, -1)$, $t \in \mathbb{R}$,
jinak: $\frac{1}{1+a}(1, 1, -1)$.

Cv. 2.30 (a) pro $b = (t, s, -2t + s, -t + s)$, $t, s \in \mathbb{R}$,
(b) pro každé $b \in \mathbb{R}^3$.

Cv. 2.31 (a) $(1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$,
(b) $(1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n-1}n)$.

Cv. 3.8 (a) Ne, (b) Ne.

Cv. 3.15 (a) 0 nebo 1, (b) Ne, (c) Ano.

Cv. 3.20 Ne.

Cv. 3.21 $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 3.22 Ne.

Cv. 3.31 (a) Ne, (b) Ne, (c) Ne.

Cv. 4.1 Singulární.

Cv. 4.2 Singulární.

Cv. 4.4 Nemusí.

Cv. 4.5 Pro $a \neq b$, $a \neq (1 - n)b$.

Cv. 4.7 (a) $n = 1$, (b) $n = 1, 2$.

Cv. 4.10 $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Cv. 4.11 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\nexists$.

Cv. 4.13 $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, A^T.

Cv. 4.16 Ano.

Cv. 4.19 (a) $X = B^{-1}(A^{-1}DC^{-1})^T$,
(b) $X = A^{-1}B$.

Cv. 4.22 (c) $\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Cv. 4.23 $\frac{1}{\alpha^2-1}\begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ -I_n & \alpha I_n \end{pmatrix}$.

Cv. 4.35 Ne.

Cv. 4.41 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 5.3 Ano.

Cv. 5.4 (a) Ano, (b) Ano, (c) Ano.

Cv. 5.6 (d) Ne, (e) Ne.

Cv. 5.16 (a) Ne, (b) Ne, (c) Ano, (d) Ano, (e) Ne, (f) Ne, (g) Ne.
Cv. 5.17 (a) $2, 2, 2, 2, 3$, (b) $2, 4, 9, 8, 4$.
Cv. 5.18 (b) $\emptyset$ a $(3, 3, 3)$.
Cv. 5.19 $2I$.
Cv. 5.21 Jen pro $p = 7$ a $p = 11$.
Cv. 5.22 $p^4 - p^3 - p^2 + p$.
Cv. 5.23 Jen $p(x) = x^3 + x^2 + x + 3$.
Cv. 5.24 3 a 4.
Cv. 5.25 (c) 4, (d) 0, (e) 0, (f) 5.
Cv. 5.28 Ne.
Cv. 5.31 (a) 28, (b) 3, (c) 0.

Cv. 6.9 $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
Cv. 6.10 (a) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, (b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, (c) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$, (d) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
Cv. 6.14 (a) Jen id a p.
Cv. 6.15 (a) $\nexists$, (b) $p = (1, 7, 10, 4, 9, 3, 8)(2, 6)$, (c) je jich n.
Cv. 6.16 $(1, 5)(4, 8)(6, 9, 7, 10)$.
Cv. 6.17 ≥ 76.

Cv. 7.3 (a) Ano, (b) Ano, (c) Ano, (d) Ano, (e) Ne, (f) Ne, (g) Ne, (h) Ano.
Cv. 7.4 Ne, žádný.
Cv. 7.8 Ano.
Cv. 7.10 Ano.
Cv. 7.12 Ne.
Cv. 7.14 Ano.
Cv. 7.17 Ano.
Cv. 7.20 $\mathbb{R}^4$ ano, $\mathbb{Z}_2^4$ ne.
Cv. 7.21 (a) Ano, (b) Ne.

Cv. 8.6 Pro $a \notin \{1, 2\}$.

Cv. 9.2 Ne.
Cv. 9.4 Ano.
Cv. 9.5 $(3, 1, -1)$.
Cv. 9.8 $\nexists$.
Cv. 9.22 (a) 0, (b) 2, (c) 1.
Cv. 9.23 Ne.
Cv. 9.25 $\dim = 5$.
Cv. 9.27 (a) 3, (b) 2.

Cv. 10.2 $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$.
Cv. 10.6 n.
Cv. 10.8 (a) 1, (b) 3, (c) 2, (d) 2.
Cv. 10.9 $n - 1$.
Cv. 10.10 $\dim = 2$.
Cv. 10.11 7.
Cv. 10.12 $\nexists$.
Cv. 10.16 Ano.
Cv. 10.20 n.
Cv. 10.22 (a) Ne, (b) Ano, (c) Ano, (d) Ne.
Cv. 10.23 (a) Ano, (b) Ano, (c) Ano.
Cv. 10.25 Ano.

Cv. 11.2 (a)–(c) Ano, (d) Ne, (e)–(f) Ano.
Cv. 11.3 (a)–(b) Ano, (c)–(e) Ne, (f) Ano, (g) Ne.
Cv. 11.4 Ne.
Cv. 11.5 Ano.
Cv. 11.6 Ano.
Cv. 11.7 (a) Ne, (b) Ano.
Cv. 11.10 $(-2, 1)^T$.
Cv. 11.19 $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.20 (a) $(1, 2, -1)^T, (1, 1, -1)^T, (-1, -1, 0)^T$, (b) $(0, -1, 1)^T, (0, -2, 1)^T, (1, 2, -1)^T$.
Cv. 11.22 $(7, 6, -5)^T$, $(5, 3, -3)^T$, $(-1, -1, 0)^T$.
Cv. 11.23 (b) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $\nexists$.
Cv. 11.25 $(x + 2y + 3z, x - z)$.
Cv. 11.26 $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.27 $\begin{pmatrix} -2 & -10 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 18 & 6 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.29 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.30 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.33 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.34 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Cv. 11.35 $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Cv. 12.11 (a) na, neprosté, (b) na, prosté, (c) na, neprosté, (d) ne na, prosté, (e) ne na, neprosté, (f) na, prosté
Cv. 12.15 (a) 2 a 1.
Cv. 12.16 (a) 2 a 1.

Cv. 13.17 (a) $\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}\}$, (b) $\{\begin{pmatrix} 1+a & -a \\ b & 1-b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$, (c) $\operatorname{span}\{(1, 1, 1)^T\} + (3, 2, 1)^T$, (d) $\{x^2 + x + a;\ a \in \mathbb{R}\}$.
Cv. 13.24 kořeny $1, 1, -2, -3$.
Cv. 13.25 (a) $\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$, (b) -2, $1 \pm i\sqrt{3}$, (c) $1 \pm i$, $1 \pm i$, -5.
Cv. 13.26 (a) $\pm\sqrt{2}/2 \pm i\sqrt{2}/2$, (b) -2, $1 \pm i\sqrt{3}$.

Cv. 15.1 2.
Cv. 15.25 $\prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i)$.
Cv. 15.27 $\dim = n$.
Cv. 15.29 $2x - y = 10$.

Část II

Cv. 16.1 (b) $4-2i$, $11+2i$, $-7-24i$, $-1-2i$, (c) ano.

Cv. 16.4 (a) $\arccos(-\sqrt{2}/2) = 135°$, (b) $\arccos(\sqrt{6}/3) \approx 35.26°$.

Cv. 16.8 (a) $(2,-1,0)^T$, (b) $(1,1,-1)^T$.

Cv. 16.16 (a) Ne, (b) Ne, (c) Ano.

Cv. 16.23 $u \perp v$.

Cv. 16.26 (b) $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}x^T y$.

Cv. 17.5 Projekce $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^T$, vzdálenost $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cv. 17.10 $(1, 10^{-3}, 10^{-3})^T$, $(0,0,-1)^T$, $(0,-0.709,-0.709)^T$.

Cv. 18.3 $\nexists$.

Cv. 18.4 Báze $(2,5,10,1)^T$.

Cv. 18.10 (a) $v = (3,4,4)^T$, $w = (0,-2,2)^T$, (b) $v = (4,1,3,4)^T$, $w = (-3,1,1,2)^T$.

Cv. 18.11 7.

Cv. 18.12 (a) 3, (b) 7.

Cv. 18.13 (a) 7, (b) 10, (c) 6.

Cv. 18.14 $I_n - P$.

Cv. 18.25 (a) $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $e_1 e_1^T + e_2 e_2^T$, (c) I_3.

Cv. 18.26 (a) $\mathcal{S}(P)$.

Cv. 18.28 (a) $\frac{|a^T c|}{\|a\|}$, (b) $\frac{|a^T c - b|}{\|a\|}$.

Cv. 18.44 2.1961.

Cv. 18.45 $y = 9.731\, e^{0.507\, t}$.

Cv. 19.1 Ne.

Cv. 19.6 Ano.

Cv. 19.8 2^n.

Cv. 19.9 2^n.

Cv. 19.10 ∞.

Cv. 19.14 Ano.

Cv. 19.15 Ano.

Cv. 20.1 (a) $(-1)^n$, (b) $(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, (c) 2, 0, -3 a -90 (d) 4, 3, -9, 20, (e) 0 a $(1-a^2)^3$, (f) 12 345, (g) -4, (h) abc.

Cv. 20.11 $x^4 - 3x^4 + \dots$

Cv. 20.13 Nezmění.

Cv. 20.15 4.

Cv. 20.16 $n^2 - n - 2$.

Cv. 20.18 0.

Cv. 20.20 412.

Cv. 20.22 Ne.

Cv. 20.24 4.

Cv. 20.25 ± 1.

Cv. 20.28 3, 6.

Cv. 20.29 a_i.

Cv. 20.30 $\det(A')$.

Cv. 20.32 2, 1, 1.

Cv. 20.33 $\det(A) = -6$, $\det(B) = 5i$.

Cv. 20.34 (a) $(-1,1,0)^T$, (b) $(\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})^T$.

Cv. 20.36 $((a^2+c^2-b^2)/(2ac), (b^2+c^2-a^2)/(2bc), (a^2+b^2-c^2)/(2ab))^T$.

Cv. 20.37 $\frac{1}{3}$.

Cv. 20.39 π.

Cv. 20.40 (a) $x+y-1=0$, (b) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

Cv. 20.45 $n+1$.

Cv. 20.47 $x^n + (-1)^{n+1} y^n$.

Cv. 20.48 (a) $x = 1$, (b) Pro $a_0 = 0$ je $x \in \mathbb{R}$, jinak $x \in \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Cv. 20.49 $A = c - a^T b$, $B = 0$ pro $n > 2$, $C = (a^2 - b^2)^n$.

Cv. 20.50 $A = (-1)^{n(n+1)/2}$, $B = (-2)(n-2)!$, $C = n!(-1)^{n-1}$, $D = n!$.

Cv. 20.54 $A = \frac{1+\sum_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n a_i}$, $B = 1 + \sum_{i=1}^n a_i$, $C = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1}$, $D = \prod_{i=1}^n (a_i - b) + \sum_{i=1}^n b \prod_{j \neq i} (a_j - b)$.

Cv. 20.56 $1 - a^T b$.

Cv. 21.1 $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{adj}(C) = \begin{pmatrix} a^2 & -a & 1-a \\ 0 & a^2 & -a \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{adj}(D) = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 21.2 $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Cv. 21.3 $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ pro $ad \neq bc$.

Cv. 21.4 I_n.

Cv. 21.8 Ne.

Cv. 21.11 Ano.

Cv. 22.1 (a) $1 : (1,0)^T$, $2 : (0,1)^T$, (b) $0 : (1,0)^T, (0,1)^T$, (c) $1 : (1,0)^T, (0,1)^T$.

Cv. 22.2 (a) $1 : (1,0)^T$, (b) $1 \pm i : (1, 1 \pm i)^T$, (c) $-2 : (1,-1)^T$, $4 : (1,-2)^T$.

Cv. 22.3 (a) $0 : (1,1,-1)^T$, $-1 : (1,2,-1)^T$, $2 : (-1,1,2)^T$, (b) $1 : (1,2,1)^T$, $2 : (1,1,0)^T$, $3 : (1,2,2)^T$, (c) $0 : (-1,1,4)^T$, $2 : (1,1,0)^T$, $-9 : (2,-2,1)^T$, (d) $2 : (1,1,1)^T$, $-1 : (1,-1,0)^T$, $(1,0,-1)^T$.

Cv. 22.17 0 a 1.

Cv. 22.18 (a) vlastní čísla 0 a $c^T d$, (b) vlastní čísla 0 a n.

Cv. 22.20 $a + b$, $a - c$.

Cv. 22.21 $ab \geq 0$.

Cv. 22.31 Ano.

Cv. 22.33 7.

Cv. 22.34 $a = 1$, $b = 2$.

Cv. 22.35 $a = 6$.

Cv. 22.41 (b) $\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$, (c) $145A - 54I_2$.

Cv. 22.42 Nulová.

Cv. 22.48 (a) ano, (b) ano.

Cv. 22.51 (a) ± 1, (b) 0 a 1.

Cv. 22.52 Žádná nemá.

Cv. 22.53 Vlastní čísla -1 a 1.

Cv. 22.54 Vlastní čísla 0 a 1.

Cv. 23.5 (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 23.6 Ne.

Cv. 23.8 Ano, ne.

Cv. 23.20 Ne.

Cv. 23.24 Ano, ne, ne.

Cv. 23.31 $A = -2I_2$.

Cv. 23.33 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 23.34 $0, 1, 1, 2, -3$.

Cv. 23.35 (a) $c_1 = c_2 = 0$ nebo $c_1, c_2 \neq 0$.

Cv. 23.38 7.

Cv. 23.41 (a) 5, (b) 4, (c) 10.

Cv. 23.42 Jak kdy.

Cv. 23.43 Někde v $[n-k, n]$.

Cv. 23.44 Max. dvakrát.

Cv. 24.7 Např. $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$. Matice P je maticí projekce do $\operatorname{span}\{x, y\}$.

Cv. 24.8 $\pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ nebo $\pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$.

Cv. 24.15 Ne.

Cv. 24.23 (a)–(b) Ano, max. o ε.

Cv. 24.28 1 : 2.

Cv. 24.29 2 : 1 : 3.

Cv. 24.30 1 : 2 : 1.

Cv. 24.32 (a) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 25.1 Ano.

Cv. 25.2 Ano.

Cv. 25.4 1.

Cv. 25.5 10^{-9}.

Cv. 26.7 Jen $A = 0$.

Cv. 26.8 $\nexists$.

Cv. 26.11 $a > \sqrt{2}$.

Cv. 26.12 $L = \left(\begin{smallmatrix} I_n & o_n \\ I_n & 2I_n \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 26.13 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 26.14 $x = (1, 3, 2)^T$.

Cv. 27.2 (a) Ne, (b) Ano, (c) Ne.

Cv. 27.3 Ne.

Cv. 27.5 (a) Ne, (b) Ano.

Cv. 27.10 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $\nexists$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 27.13 (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (c) 2.

Cv. 27.18 (a) $A, B \sim \operatorname{diag}(1, 1, 0)$, $C \sim \operatorname{diag}(1, 1, 1)$,
(b) $D \sim \operatorname{diag}(1, -1, 0)$,
$E \sim \operatorname{diag}(1, -1, -1)$,
$F \sim \operatorname{diag}(1, -1)$.

Cv. 27.22 (b) $\binom{n+2}{2}$.

Cv. 28.5 $\det(H(u)) = -1$.

Cv. 28.15 (a) 0 a 1, (b) 0 a $\sqrt{8}$,
(c)–(d) $\|a\|_2$, pokud $a \neq o$.

Cv. 29.8 $x \neq 0$ a $x \neq -\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Značení

Množiny

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	množina přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel
$\mathbb{Z}_n$	množina $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, sčítání a násobení modulo n
$U + V$	součet množin (tj. i prostorů), $U + V = \{u + v;\ u \in U, v \in V\}$
$U \times V$	kartézský součin množin, $U \times V = \{(u, v);\ u \in U, v \in V\}$
2^M	množina všech podmnožin množiny M

Matice a vektory

$E_i(\alpha)$	elementární matice pro vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$
$E_{ij}(\alpha)$	elementární matice pro přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému
E_{ij}	elementární matice pro prohození dvou řádků i, j
$\operatorname{rank}(A)$	hodnost matice A
$\operatorname{trace}(A)$	stopa matice A, $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$
A^T	transpozice matice A
A^*	Hermitovská transpozice matice, $A^* = \overline{A}^T$
$A^\dagger$	pseudoinverze matice A
$\|A\|$	norma matice A
$p_A(\lambda)$	charakteristický polynom matice A
$\rho(A)$	spektrální poloměr matice A, největší absolutní hodnota z vlastních čísel
$C(p)$	matice společnice polynomu $p(x)$
REF	odstupňovaný tvar matice
RREF	redukovaný odstupňovaný tvar matice
A_{i*}	i-tý řádek matice A
A_{*j}	j-tý sloupec matice A
$\operatorname{diag}(v)$	diagonální matice s diagonálními prvky $v_1, \ldots, v_n$
$J_k(\lambda)$	Jordanova buňka
0_n, 0	nulová matice (všechny složky jsou rovny 0)
1_n	jedničková matice (všechny složky jsou rovny 1)
I_n, I	jednotková matice (diagonální s jedničkami na diagonále)
e_i	jednotkový vektor, $e_i = I_{*i} = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0)^T$
e	vektor ze samých jedniček, $e = (1, \ldots, 1)^T$
$\|x\|_p$	p-norma vektoru x, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\|x\|_2$	eukleidovská norma vektoru x, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Prostory

kan	kanonická báze, $e_1, \dots, e_n$
$\mathcal{S}(A)$	sloupcový prostor matice A
$\mathcal{R}(A)$	řádkový prostor matice A
$\mathrm{Ker}(A)$	jádro matice A
$\mathcal{P}^n$	prostor reálných polynomů proměnné x stupně nanejvýš n
$\mathcal{C}_{\langle a,b\rangle}$	prostor spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$
$\Subset$	podprostor
$\mathrm{span}(W)$	lineární obal množiny vektorů W
$[v]_B$	souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B

Zobrazení

$\mathrm{sgn}(p)$	znaménko permutace p
S_n	množina všech permutací na $\{1, \dots, n\}$
$g \circ f$	složené zobrazení, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$f(U)$	obraz množiny U při zobrazení f
$\mathrm{Ker}(f)$	jádro zobrazení f
${}_{B_2}[f]_{B_1}$	matice lineárního zobrazení f vzhledem k bázi B_1, B_2

Čísla

r^+	kladná část reálného čísla, $r^+ = \max(r, 0)$
r^-	záporná část reálného čísla, $r^- = \max(-r, 0)$
$\mathsf{Re}(z)$	reálná část komplexního čísla z
$\mathsf{Im}(z)$	imaginární část komplexního čísla z
$\overline{z}$	komplexně sdružené číslo, $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

Literatura

Sbírka úloh z matematiky. Elektronická sbírka, http://matematika.reseneulohy.cz/cs.

J. Bečvář. *Sbírka úloh z lineární algebry.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1975.

L. Bican. *Lineární algebra v úlohách.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979.

J. Hefferon. Linear algebra, 2011. http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/.

C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra (incl. CD-ROM and solutions manual).* SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

V. V. Prasolov. *Problems and Theorems in Linear Algebra.* American Mathematical Society, USA, 1994. https://staff.math.su.se/mleites/books/prasolov-1994-problems.pdf.

K. Výborný and M. Zahradník. *Používáme lineární algebru.* Karolinum, Praha, 2002. http://matematika.cuni.cz/zahradnik-plas.html.