Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 1

(ZS 2020/2021)

7. října 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová, Milan Hladík, Pavel Hubáček, Karel Král, Pavel Paták, Veronika Slívová, Jiří Šejnoha

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů]

Obsah

1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1.1 Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutuje předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Cv. 1.2 Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Cv. 1.3 Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Cv. 1.4 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Cv. 1.5 Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Cv. 1.6 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

Cv. 1.7 Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1, 5, 3],\ (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1],\ (-1, 2, 2).$$

Cv. 1.8 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 7]$.

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic:

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right).$$

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Cv. 2.4 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Cv. 2.5 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Cv. 2.7 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 3.2 Vyřešte soustavy rovnic $Ax = b$ a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Cv. 3.3 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Cv. 3.4 Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a 0 stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(b) $A + B = B + A$

(c) $A + 0 = A$

(d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

(e) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

(f) $A + (-1)A = 0$

(g) $1A = A$

(h) $A(B + C) = AB + AC$

(i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(j) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(k) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$

(l) $(A^T)^T = A$

(m) $A^T A$ je symetrická

(n) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(o) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$

(p) $AI_n = A$

Cv. 3.5 Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$.

Komutuje součin matic, pokud jsou obě matice symetrické?

Cv. 3.6 Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Diskutujte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0\ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Cv. 4.2 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Cv. 4.3 Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 4.4 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Připomeňme, že elementární operace a příslušné matice jsou:

(a) Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$, lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{ccccc} & j & & & \end{array} \end{array} \quad (\alpha \text{ v řádku } i)$$

(c) Výměna i-tého a j-tého řádku jde reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \end{array}.$$

Cv. 4.5 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Cv. 4.6 Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Cv. 4.7

(a) Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Najděte limitu (pokud nevíte, co je limita, tak použijte intuici)

$$\lim_{k\to\infty} AD^k A^{-1}, \quad \text{kde} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

a určete její hodnost.

(c) Aplikujte předchozí na matici A, jejíž první sloupec i řádek je tvořený jednotkovým vektorem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

5. Grupy a tělesa

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(g) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(h) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 5.3 Nechť $(G, \circ)$ je grupa a $x \in G$. Rozhodněte, zda $(G, *)$ je grupou s operací definovanou $a * b = a \circ x \circ b$ pro všechna $a, b \in G$.

Cv. 5.4 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

(a) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým součinem,

(b) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým součinem.

Cv. 5.5 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ a $4/3$ v $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Cv. 5.6 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z \; &= 1, \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 5.7 Nalezněte multiplikativní inverze 9^{-1} a 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{31}$.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Cv. 6.3 Určete znaménko permutací r, s, kde

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = (1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$$

Cv. 6.4 Najděte všechny permutace komutující s $p = (1, 2)(3)$.

Cv. 6.5 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$.

Cv. 6.6 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Cv. 6.7 Dokažte, že znaménko permutace p lze ekvivalentně definovat jako $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^s$, kde s je počet cyklů p sudé délky.

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x,y,z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Cv. 7.2 Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.3 Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \bigcap \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cv. 7.5 Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

Cv. 7.6 Je-li $\mathbb{T}$ (komutativní) těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$(1,2,-1,0)^T \ \text{ a } \ (1,0,0,1)^T.$$

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)$, $(1,-1,1)$, $(3,2,-2)$.

(b) $(2,0,3)$, $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$.

Cv. 8.2 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$.

(b) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Cv. 8.3 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.5 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U+V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u+v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Cv. 8.6 Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x-1,\ x-2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2+2x+3,\ x+1,\ x-1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x+1),\ \sin(x+2),\ \sin(x+3)\}$.

(e) $\{\ln(x),\ \log_{10}(2x),\ \log_2(x^2)\}$.

9. Báze a dimenze

Cv. 9.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4^T)$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Cv. 9.2 Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2,\ x+x^2,\ x^3-1\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Cv. 9.3 Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_4,\ v_2\}$.

Cv. 9.4 Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \operatorname{span}\{(4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T, (2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\}$.

(b) $V = \{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,\ 3x_1+4x_2+3x_3+x_4+4x_5+2x_6+4x_7 = 0,\ 2x_1+x_2+4x_3+4x_5+2x_7 = 0\}$.

Cv. 9.5 Rozhodněte, zda prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,
(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,
(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,
(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Cv. 10.6 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A+B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Cv. 10.7 Jaký je vztah mezi prostory $\mathrm{Ker}(AB)$ a $\mathrm{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.1 Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je/není lineárním zobrazením.

(a) $f_1(x) = 0$,

(b) $f_2(x) = 1$,

(c) $f_3(x) = 2x$,

(d) $f_4(x) = x + 1$,

(e) $f_5(x) = x^2$.

Cv. 11.2 Rozhodněte a dokažte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_6(x, y) = (x + y,\, x - y)$,

(b) $f_7(x, y) = (x - y,\, x - y)$.

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x + y,\, x - y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení (vůči kanonické bázi).

Cv. 11.4 Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned} f((-1, -3, 1)^T) &= (-1, 1, 0)^T, \\ f((0, 3, -2)^T) &= (0, 1, -1)^T, \\ f((-1, -2, 2)^T) &= (1, 0, 1^T). \end{aligned}$$

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f\colon U \to U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}.$$

Vypočtěte matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,0,3)^T) &= (-2,0,6)^T \\ f((2,-2,2)^T) &= (4,-4,4)^T \\ f((0,1,-3)^T) &= (0,2,-6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bází $B_U = \{x_1 = (-1,0,3)^T,\ x_2 = (2,-2,2)^T,\ x_3 = (0,1,-3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1,1,0)^T, y_2 = (0,1,-1)^T, y_3 = (1,0,1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V? Zobrazení $f\colon U \to V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$\begin{aligned} B_U &= \{x_1 = (-1,0,3)^T,\ x_2 = (2,-2,2)^T,\ x_3 = (0,1,-3)^T\}, \\ B_V &= \{y_1 = (-1,1,0)^T,\ y_2 = (0,1,-1)^T,\ y_3 = (1,0,1)^T\}. \end{aligned}$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V, tj. $[x]_{B_V}$.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U, tj. $[x]_{B_U}$.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(-1,0,3)^T,\ (2,-2,2)^T,\ (0,1,-3)^T\},$$
$$B_V = \{-x^2 + x,\ x - 1,\ x^2 + 1\}.$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

(a) $f(x) = f(y) = (-1,-1,1)^T$,

(b) $f(x) = f(y)$.

13. Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 13.1 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 13.2 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (1,2,3)^T, \\ f(1,3,5) &= (3,2,1)^T, \\ f(7,1,4) &= (1,1,1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 13.3 Nechť $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.

Cv. 13.4 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Cv. 13.5 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 13.6 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\operatorname{Ker}(f^n) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+2c)^T$.

Cv. 13.8 Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\operatorname{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB).$$

14. Afinní podprostory

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,2,3)^T,\ x_1 = (2,3,1)^T,\ x_2 = (1,3,2)^T,\ x_3 = (2,1,3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,0,2)^T,\ x_1 = (2,2,1)^T,\ x_2 = (2,1,3)^T,\ x_3 = (3,3,2)^T$$

leží v jedné rovině.

Cv. 14.4 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T$,

(b) $M = \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$.

Cv. 14.5 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 10$ a g představuje překloplení podle přímky $q : x = 2$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 14.6 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.