Příklady pro cvičení X.34
Lineární algebra 1

(čtvrtek od 15:40, ZS 2020/2021)

7. ledna 2021

4. Cvičení – regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Spočítejte $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{211}$,

Cv. 4.2 Co je výsledkem součinu $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} A$?

Cv. 4.3 Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má jeden nulový sloupec. Je singulární nebo regulární?
A co když $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má jeden nulový řádek?

Cv. 4.4 Spočítejte $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.5 Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.

Cv. 4.6 Spočítejte $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}^{-1}$.

Cv. 4.7 Upravte:

(a) $(ABC)^{-1}$,

(b) $A(B^TA)^{-1}(AB)^T$.

Cv. 4.8 Jak co nejefektivněji určit hodnotu $A^{-1}Bd + A^{-1}Cd$?

Cv. 4.9 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Cv. 4.10 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^kA^{-1}.$$

Cv. 4.11 Vyjádřete: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární.

5. Cvičení – grupy a tělesa

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je grupou

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $\circ$ je definováno: $a \circ b \coloneqq a + b + 3$,

(d) množina reálných funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se sčítáním $(\mathcal{F}, +)$,

(e) množina otočení v $\mathbb{R}^2$ podle počátku se skládáním,

Cv. 5.2 V grupě $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverzním a^{-1} k a proveďte:

(a) najděte e^{-1},

(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

(c) dokažte z definice, že pokud $ab = a$, tak nutně $b = e$,

Cv. 5.3 Zjistěte, zda je podgrupou

(a) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$,

(b) $(\text{sudá celá čísla}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$,

(c) $(\text{lichá celá čísla}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$,

(d) $(\mathbb{Z}_n, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

Cv. 5.4 Najděte co nejvíc netriviálních podgrup grupy funkcí $(\mathcal{F}, +)$.

Cv. 5.5 Najděte co nejvíc netriviálních podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n\times n}, +)$.

Tělesa

Cv. 5.6 Procvička v tělese $\mathbb{Z}_p$. Například:

(a) spočítejte v Z_5 hodnoty $4 + 3$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$,

(b) spočítejte v Z_{11} hodnoty $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1}, $6/7$.

Cv. 5.7 Vyřešte soustavu rovnic bez prohazování řádků (a udělejte pak zkoušku)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_3.$$

Cv. 5.8 Spočítejte: 2^{2010} v $\mathbb{Z}_5$.

Cv. 5.9 Spočítejte v $\mathbb{Z}_7$ mocninu matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

6. Cvičení – tělesa a permutace

Tělesa

Cv. 6.1 Procvička v tělese $\mathbb{Z}_p$. Například:

(a) spočítejte v Z_5 hodnoty $4 + 3$, -3, $4 \cdot 3$, 3^{-1}, $4/3$,

(b) spočítejte v Z_{11} hodnoty $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1}, $6/7$.

Cv. 6.2 Vyřešte soustavu rovnic bez prohazování řádků (a udělejte pak zkoušku)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_3.$$

Cv. 6.3 Spočítejte: 20^{3332} v $\mathbb{Z}_{31}$,

Permutace

Cv. 6.4 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $q \circ p$, $p \circ q$, $\mathrm{sgn}(p)$, p^{-1}, $\mathrm{sgn}(p^{-1})$. Tabulkou i přes cykly.

Cv. 6.5 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte p^9.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Cv. 6.6 Rozložte $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic. Rozložte to ještě jiným způsobem. Jaký je nejmenší možný počet transpozic?

Cv. 6.7 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit z $n - 2$ nebo $n - 1$ transpozic.

Cv. 6.8 Najděte všechny permutace splňující:

(a) $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$,

(b) $p \in S_{10}$ a $p^5 = (1, 3, 4, 7, 8, 9, 10)(2, 6)$,

Cv. 6.9 Najděte všechny permutace komutující s

(a) $p = (1, 2)(3)$.

(b) $p = (1, 2)(3, 4)$.

7. Cvičení – permutace a vektorové prostory

Permutace

Cv. 7.1 Rozložte $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic. Jaký je nejmenší možný počet transpozic?

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.2 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(d) $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{R}$, tedy posloupnosti reálných čísel.

Cv. 7.3 Najděte vektorový prostor s právě 25 vektory. Najděte případně ještě další dva.

Cv. 7.4 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 7.5 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozhodněte, zda množina řešení soustavy lineárních rovnic $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$.

Lineární obal

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

$$(2, 1, 3)^T,\ (3, 1, 2)^T,\ (1, 1, 1)^T.$$

Cv. 7.7 Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$, $(3, 4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Cv. 7.8 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí:

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \ \Rightarrow\ \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \ \Leftarrow\ \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,

(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

8. Cvičení – lineární obal, lineární závislost a nezávislost

Lineární obal

Cv. 8.1 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí:

(a) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(d) $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$,

Cv. 8.2 Vyjádřete $7x - 7$ jako lineární kombinaci polynomů $x^2 + x$, $x + 2$ a $x^2 - x + 3$.

Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.3 Je podsystém lineárně nezávislého systému vektorů lineárně nezávislý?

Cv. 8.4 Je podsystém lineárně závislého systému vektorů lineárně závislý?

Cv. 8.5 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.6 Zjistěte, zda jsou vektory lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)^T,\ (1, -1, 1)^T,\ (3, 2, -2)^T$,

(b) $(2, 0, 3)^T,\ (1, -1, 1)^T,\ (0, 2, 1)^T$,

Cv. 8.7 Zjistěte, zda jsou vektory z prostoru reálných funkcí $\mathcal{F}$ lineárně nezávislé:

(a) $\sin x,\ \cos x$.

Cv. 8.8 Buďte u, v, w lineárně nezávislé vektory z prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé:

(a) $o,\ u,\ v$

(b) $u,\ 2u,\ w$,

(c) $w,\ v,\ u$,

(d) $u,\ v + w$,

(e) $u + v,\ u - v,\ u + w,\ u - w$,

(f) $u - v,\ 2v + w,\ -u - v + 3w$,

9. Cvičení – báze, dimenze

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$,

(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(f) symetrické matice v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.2 Najděte bázi prostoru $\{x \in \mathbb{R}^5;\ x_1 + x_3 = x_2 + 2x_4 = x_5\}$.

Cv. 9.3 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$.

(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$.

Cv. 9.4 Najděte všechny podprostory $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.5 Buďte U, V podprostory W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte konkrétní příklad kdy se nabydou meze.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$.

Cv. 9.6 Označme U prostor symetrických matic řádu 3 a V prostor horních trojúhelníkových matic řádu 3.

(a) Najděte bázi a určete dimenzi prostoru U a V.

(b) Co představuje prostor $U \cap V$ a jaká je jeho dimenze?

(c) Co představuje prostor $U + V$ a jaká je jeho dimenze?

Cv. 9.7 Buď $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ množina vektorů nějakého prostoru nad $\mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{span} V) = n - 1$, $n \geq 3$. Kolika způsoby lze z V vybrat bázi $\operatorname{span}(V)$ pokud víme, že

(a) $v_1 = o$

(b) $v_1 = 2v_2$

(c) $v_1 = u_2 - u_3$

Cv. 9.8 Dokažte: Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Je-li $u_1, \ldots, u_m$ báze U a $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ je báze W.

10. Cvičení – maticové prostory

Cv. 10.1 Rozhodněte, zda pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \operatorname{Ker}(A)$

(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$

Cv. 10.2 Najděte matici A takovou, že $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)$, $(1,2)$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$.

Najděte ještě jinou takovou matici.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^4$ a $\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^3$.

Cv. 10.4 Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

najděte báze prostorů $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$.

Cv. 10.5 Určete dimenzi prostoru $V = \{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$.

Cv. 10.6 Rozhodněte, zda platí pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ implikuje $A = B$.

(b) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ implikuje $A = QB$ pro nějakou regulární matici Q.

(c) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ právě tehdy když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.

(d) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ právě tehdy když $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$.

Cv. 10.7 Vyřešte první cvičení nad $\mathbb{Z}_5$.

Cv. 10.8 Jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$?

Cv. 10.9 Z vektorů vyberte bázi a pro ostatní najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (1,2,-1)^T,\ v_2 = (-1,8,-1)^T,\ v_3 = (-4,2,2)^T.$$

11. Cvičení – lineární zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x, y) = (x, y + 3)^T$,

(b) $f(x, y) = (0, 0)^T$,

(c) $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$,

(d) $f(x, y) = (x^2, y)^T$,

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ jsou lineární ($\mathcal{F}$ je prostor reálných funkcí):

(a) $f(x) \mapsto x^2 \cdot f(x)$,

(b) $f(x) \mapsto f(x) - 7x$,

Cv. 11.3 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,

(b) $f(A) = A + B$, kde $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je pevná,

(c) $f(A) = I_n$,

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $(-1, 1, 2)^T$ při lineárním zobrazení definovaném:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1)^T,\ f(0, 1, 0) = (-1, 2)^T,\ f(0, 0, 1) = (0, 0)^T.$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

(b) Projekce na osu x.

(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.

(d) Překlopení podle osy $(1, 1)$.

Cv. 11.6 Najděte matici přechodu od báze v_1, v_2, v_3, v_4 k bázi v_2, v_4, v_1, v_3.

Cv. 11.7 Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a dívejme se na ní jako na matici přechodu.

(a) Jakou bázi převádí A na kanonickou?

(b) Na jakou bázi převádí A kanonickou bázi?

Cv. 11.8 V $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze:

$$B = \{(1, 1, 1)^T,\ (0, 1, -1)^T,\ (2, 0, 1)^T\},\quad B' = \{(3, 2, 2)^T,\ (1, 0, 1)^T,\ (1, 2, 2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B do kanonické.

(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do B.

(c) Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B.

(d) Sestrojte matici přechodu od báze B' do B.

12. Cvičení – lineární zobrazení

Matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané: $f(e_1) = (1, -1, 1)^T$, $f(e_2) = (0, 1, 1)^T$. Mějme báze $B_1 = \{(1, -1)^T,\ (1, 1)^T\}$ a $B_2 = \{(1, -1, 1)^T,\ (1, 0, 1)^T,\ (0, 0, 1)^T\}$. Spočítejte (stačí sestavit matice a vyjádřit vzorcem):

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$,

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{B_1}$,

(c) matici zobrazení od kanonické báze k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\mathrm{kan}}$,

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Isomorfismus

Cv. 12.2 Najděte isomorfismus mezi prostory:

(a) $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$,

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$.

Cv. 12.3 Rozhodněte, zda jsou isomorfní:

(a) prostor $\mathbb{R}^2$ a prostor $\{x \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.

Cv. 12.4 Dokažte, že isomorfismus v $\mathbb{R}^n$ zobrazuje přímky na přímky.

Obraz a jádro

Cv. 12.5 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto A - A^T$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) 0,

(c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Cv. 12.6 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^4$ dané předpisem $p(x) \mapsto x \cdot p(x)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) 0,

(b) x^2,

(c) $x^2 - 2x + 1$.

Prosté a „na“

Cv. 12.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ s předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a + b + c,\ a + b,\ a)^T$.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ s předpisem $f\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (a + b + c + d,\ a + b + c,\ a + b,\ a)^T$.

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ s předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a - b + c,\ b + c,\ a + 2c,\ a - c)^T$.

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ s předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b,\ 2b - c,\ a - b + c)^T$.

13. Cvičení – lineární zobrazení a afinní podprostory

Obraz a jádro lineárního zobrazení

Úlohy v této sekci řešte pokud možno maticově.

Cv. 13.1 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1)^T,\ f(0,1,1) = (-1,0)^T,\ f(1,1,0) = (1,0)^T.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \operatorname{Ker}(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\operatorname{Ker}(f)$.

Cv. 13.2 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = 2x^2 + 2x + 2,\ f(0,1,1) = 3x^2 + 4x + 1,\ f(1,1,0) = 2x^2 + x + 4.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \operatorname{Ker}(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\operatorname{Ker}(f)$.

Afinní podprostory

Cv. 13.3 Ukažte, že množina řešení reálné soustavy $Ax = b$ je afinní, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 13.4 Nechť množina řešení $Ax = b$ je 2-dimenzionální afinní podprostor. Co můžeme říct o množině řešení $Ax = b'$? Najděte příklady ilustrující tu kterou situaci.

Cv. 13.5 Buď $M = V + a$ afinní podprostor. Dokažte, že prostor V je dán jednoznačně.

Cv. 13.6 Určete dimenzi afinního podprostoru generovaného vektory $(1,2)^T$, $(2,1)^T$, $(0,3)^T$.

Cv. 13.7 Dokažte, že vektory $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $(x_1, 1), \dots, (x_n, 1)$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 13.8 Dokažte:

$$U + a = U + b \ \text{ právě tehdy, když } \ a - b \in U.$$

Cv. 13.9 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $W + a$ afinní podprostor U. Ukažte, že jeho obraz je afinní podprostor V a najděte jeho popis.

Cv. 13.10 Najděte úplný vzor $f^{-1}(1,1,-2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané

$$f(a,b,c) = (a-b, b-c, c-a)^T.$$