Příklady na procvičení

z

Lineární algebry 1

(ZS 2020/2021)

7. října 2021

zpracovali:

Martin Černý, Pavel Dvořák, Elif Garajová, Milan Hladík, Pavel Hubáček, Karel Král, Pavel Paták, Veronika Slívová, Jiří Šejnoha

[uvedené úlohy byly převzaty z různých zdrojů]

Obsah

1. Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

Cv. 1.1 Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku v prostoru. Diskutuje předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

Řešení:
Možností je celá řada:

- *Bod a směrnice přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrnice je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

Cv. 1.2 Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem $[3, 2, 1]$ a směrnicemi $(1, 1, 1)$, $(2, -1, 0)$.

Řešení:
Normálu získáme například vektorovým součinem směrnic $(1, 1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, -3)$. Rovnice má tudíž tvar $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d$. Absolutní člen d určíme ze znalosti bodu roviny, tedy $d = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$. Rovnice tak je

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Pokud se chceme vyhnout použití vektorového součinu (nebo jej neznáme), budeme uvažovat normálu v obecném tvaru (a, b, c) a rovnici tak ve tvaru $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Protože rovina obsahuje bod $[3, 2, 1]$, dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrnice $(1, 1, 1), (2, -1, 0)$, které musí být kolmé na normálu, dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – mohu uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení $a = t$, $b = 2t$, $c = -3t$, $d = 4t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolíme například $t = 1$ (nebo jakékoli jiné nenulové t) a máme jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrnic!

Cv. 1.3 Najděte parametrické vyjádření roviny $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$.

Řešení:

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme $x_2 = x_3 = 0$ a z rovnice dostaneme $x_1 = 2$. Tudíž máme bod $[2, 0, 0]$.

Směrnice získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu $(2, 3, 1)$. Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například $(0, 1, -3)$ a $(1, 0, -2)$. Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor (a, b, c) musí být kolmý na normálu, tj. $2a + 3b + c = 0$. Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme $a = 0, b = 1$ a dopočítáme $c = -3$, a jako druhé řešení dosadíme $a = 1, b = 0$ a dopočítáme $c = -2$. Opět musíme být trochu opatrní, aby směrnice neudávali stejný směr.

Cv. 1.4 Určete parametrický popis přímky, zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

Řešení:
V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru t .

Například eliminací proměnné x_1 dostaneme rovnici $x_2 + x_3 = 1$. Zvolíme $t = x_3$ jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice $x_2 + x_3 = 1$ odvodíme $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$. Z původní rovnice $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ vyjádříme $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$.

Výsledek: $[x_1, x_2, x_3] = [-1 + 2t, 1 - t, t] = [-1, 1, 0] + t(2, -1, 1)$. To jest, přímka prochází bodem $[-1, 1, 0]$ a má směrnici $(2, -1, 1)$.

Cv. 1.5 Najděte dvě rovnice, popisující přímku $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$.

Řešení:
Každá rovnice musí vyhovovat bodu $[3, 2, 1]$ a její normála musí být kolmá na směrnici $(1, -1, 1)$. Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například $(1, 1, 0)$, ta je kolmá na směrnici. Normále odpovídá rovnice $x_1 + x_2 = d$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d = 5$. Nyní zvolme jinou normálu, například $(0, 1, 1)$, která je též kolmá na směrnici. Ta odpovídá rovnici $x_2 + x_3 = d'$ a ze znalosti bodu $[3, 2, 1]$ odvodíme $d' = 3$. Tudíž výsledkem jsou rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$.

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu $(1, 0, -1)$, která vede na rovnici $x_1 - x_3 = 2$. Tudíž rovnice $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 - x_3 = 2$ dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$ přidali ještě rovnici $x_1 - x_3 = 2$, tak soustava $x_1 + x_2 = 5$, $x_2 + x_3 = 3$, $x_1 - x_3 = 2$ sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

Cv. 1.6 Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru $\mathbb{R}^3$. Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

<u>Řešení:</u>
Možné polohy přímek:

- *Rovnoběžné.*
  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.
  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.
- *Totožné.*
  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.
  Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.
- *Různoběžné.*
  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.
  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.
- *Mimoběžné.*
  Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.
  Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

Cv. 1.7 Určete vzájemnou polohu dvou přímek, zadaných bodem a směrnicí

$$p : [1,5,3],\ (1,-2,-2), \quad q : [3,1,-1],\ (-1,2,2).$$

<u>Řešení:</u>
Protože jsou směrnice až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod $[1,5,3]$ přímky p leží na přímce q, neboť $[1,5,3] = [3,1,-1] + t(-1,2,2)$ pro $t = 2$. Tudíž jsou přímky totožné.

Cv. 1.8 Najděte kvadratickou funkci, procházející body $[1,1]$, $[2,2]$, $[3,7]$.

<u>Řešení:</u>
Kvadratická funkce má tvar $y = ax^2 + bx + c$. Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1,\ 4a + 2b + c = 2,\ 9a + 3b + c = 7,$$

z čehož vypočítáme $a = 2$, $b = -5$, $c = 4$. Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

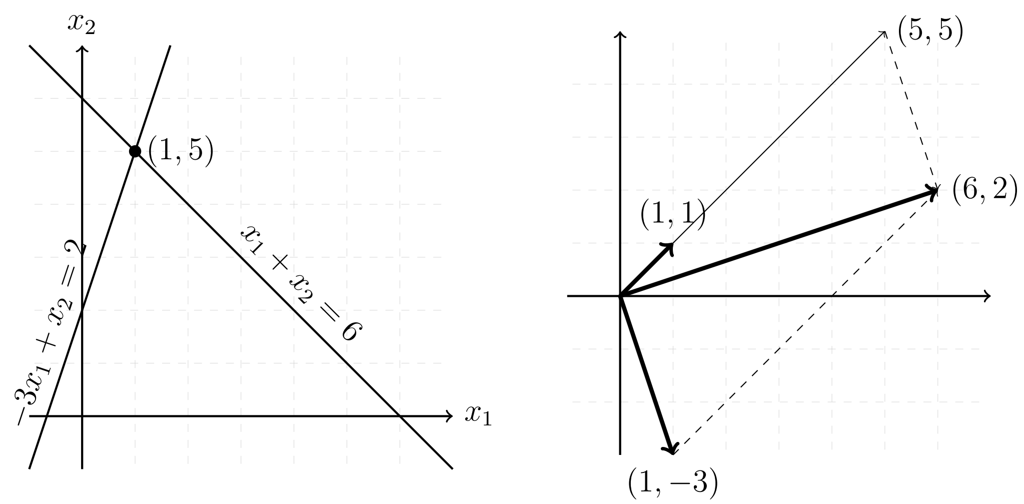
a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

Řešení:
Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$



Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic:

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní můžeme použít zpětnou substituci, nebo dále upravit matici až na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme $x_4 = 0$. Z druhého řádku můžeme vyjádřit $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3,\ 0) = (1, 3, 0, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1, 0).$$

V tomto případě opět platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, ale zároveň je $\operatorname{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Řešení:
Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{0}&\overline{0}&\overline{0} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&& \\ 0&0&\overline{0}&\overline{0} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&\bullet& \\ 0&0&0&\overline{0} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&\bullet \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{\bullet}&\overline{}&\overline{} \\ 0&0&\overline{0}&\overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{0}&\overline{\bullet}&\overline{} \\ 0&0&0&\overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{0}&\overline{0}&\overline{\bullet} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&& \\ 0&0&\overline{\bullet}&\overline{} \\ 0&0&0&\overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&& \\ 0&0&\overline{0}&\overline{\bullet} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&\bullet& \\ 0&0&0&\overline{\bullet} \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{\bullet}&\overline{}&\overline{} \\ 0&0&\overline{\bullet}&\overline{\underline{}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{\bullet}&\overline{}&\overline{} \\ 0&0&\overline{0}&\overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet&&& \\ 0&\overline{0}&\overline{\bullet}&\overline{} \\ 0&0&0&\overline{\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&\bullet&& \\ 0&0&\overline{\bullet}&\overline{} \\ 0&0&0&\overline{\bullet} \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \ldots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, tj. celkem $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.

Cv. 2.4 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Řešením soustavy je tedy vektor $x = (2, 1, 1)$ pro pravou stranu b_1, vektor $x = (1, 0, 3)$ pro b_2 a vektor $x = (4, -1, -1)$ pro b_3.

Cv. 2.5 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right).$$

Řešení:
Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme rovnici $(a+3)(1-a)x_4 = 1-a$, tedy $x_4 = \frac{1}{a+3}$ pro $a \notin \{-3, 1\}$. Zpětnou substitucí pak dopočítáme řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\tfrac{1}{a+3}, \tfrac{1}{a+3}, \tfrac{1}{a+3}, \tfrac{1}{a+3}\right).$$

Pro $a = -3$ dostaneme rovnici $0x_4 = 4$, soustava tudíž nemá řešení.

Pro $a = 1$ má soustava nekonečně mnoho řešení popsaných rovnicí $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, tedy ve tvaru $(1 - x_2 - x_3 - x_4,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ pro $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Řešení:
Hledáme soustavu lineárních rovnic s řešením

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1)\\ &= (1 - 2x_2 - 3x_4,\ x_2,\ 1 + 2x_4,\ x_4).\end{aligned}$$

Můžeme tedy vytvořit soustavu obsahující rovnice $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4$ a $x_3 = 1 + 2x_4$ a třetí rovnici, která množinu řešení dál neomezí, např.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2\end{array}\right), \quad \dots$$

Cv. 2.7 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Řešení:
Postupně přičteme ke každému řádku (od 2. řádku po n-tý) všechny řádky nad ním:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1}\end{array}\right).$$

Tím převedeme matici soustavy na jednotkovou matici a na pravé straně dostaneme řešení $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$.

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
(-1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \\ \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}& \\
&= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 9\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 9\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 7\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 23 & 2\cdot 13 \\ 2\cdot 16 & 2\cdot 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+46 & -1+26 \\ -4+32 & -1+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cv. 3.2 Vyřešte soustavy rovnic $Ax = b$ a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b.$$

(b) Řešením druhé soustavy rovnic vektor $x = (-1 - t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 2\cdot 2 \\ 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 1\cdot 2 \\ 2\cdot(-1-t) + 2\cdot t + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b.$$

Cv. 3.3 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} (AD)_{jk} &= \sum_{\ell} A_{j\ell} D_{\ell k} \\ &= A_{jj} D_{jk} && (A_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} D_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí D a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Prohození i-tého a j-tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom BD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned}
(BD)_{kh} &= \sum_\ell B_{k\ell} D_{\ell h} \\
&= \begin{cases} B_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ B_{ki} D_{ih} & \text{pro } k = j \\ B_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } B_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ D_{ih} & \text{pro } k = j \\ D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } B)
\end{aligned}$$

Vidíme, že BD má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí D a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

(c) Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$C = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a C je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom CD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \ldots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \ldots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned}
(CD)_{kh} &= \sum_\ell C_{k\ell} D_{\ell h} \\
&= \begin{cases} C_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ C_{kk} D_{kh} + C_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(pro ostatní hodnoty } m \text{ je } C_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ D_{kh} + \alpha D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } C)
\end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i-tého zůstaly zachovány a k i-tému řádku jsme přičetli α násobek j-tého řádku.

Cv. 3.4 Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a 0 stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

(a) $A+(B+C)=(A+B)+C$	(i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
(b) $A+B=B+A$	(j) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
(c) $A+0=A$	(k) $\alpha A+\beta B=(\alpha+\beta)(A+B)$
(d) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$	(l) $(A^T)^T=A$
(e) $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)$	(m) A^TA je symetrická
(f) $A+(-1)A=0$	(n) $(A+B)^T=A^T+B^T$
(g) $1A=A$	(o) $(\alpha A)^T=\alpha(A^T)$
(h) $A(B+C)=AB+AC$	(p) $AI_n=A$

Řešení:

(a) Tvrzení platí.

Prvně ukážeme, že levá i pravá strana dávají smysl a mají stejné rozměry. Matice A, B, C jsou všechny stejného řádu, označíme si jejich rozměry jako $m \times n$. Pak na levé straně sčítáme $B + C$, což jsou obě matice řádu $m \times n$ a dostáváme novou matici řádu $m \times n$. Tu přičítáme k matici A, která je rovněž řádu $m \times n$. Tedy levá strana dává smysl a výsledkem je matice řádu $m \times n$.

Obdobně pro pravou stranu dostáváme že $(A + B) + C$ dává smysl a výsledkem je vždy matice $m \times n$.

Nyní ukážeme, že se matice rovnají porovnáním po složkách. Pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$ platí:

$$\begin{aligned}
[A + (B+C)]_{ij} &= [A]_{ij} + [(B+C)]_{ij} \\
&= [A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij}) \\
&= ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij} && \text{(asociativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [(A + B)]_{ij} + [C]_{ij} \\
&= [(A + B) + C]_{ij}.
\end{aligned}$$

(b) Tvrzení platí.

Podobně jako v předchozím příkladě. Nejprve ukážeme, že obě strany dávají pro všechny uvažované matice A, B smysl a výsledky mají shodné rozměry. Poté ukazujeme rovnost po složkách, tedy pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$\begin{aligned}
[A + B]_{ij} &= [A]_{ij} + [B]_{ij} \\
&= [B]_{ij} + [A]_{ij} && \text{(komutativita sčítání v } \mathbb{R}) \\
&= [B + A]_{ij}
\end{aligned}$$

(c) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(d) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(e) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(f) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(g) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(h) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(i) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(j) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(k) Tvrzení neplatí.

Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B, která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2,\ \beta = 3,\ A \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A \ + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)(A + B).$$

(l) Tvrzení platí.

Je-li A matice řádu $m \times n$, pak A^T je matice řádu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět matice řádu $m \times n$. Tedy matice na pravé i levé straně mají shodné rozměry.

Poté dokazujeme rovnost po složkách, pro všechny $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$.

$$[(A^T)^T]_{ij} = [A^T]_{ji} = [A]_{ij}$$

(m) Tvrzení platí.

Matice D je symetrická, pokud platí $D = D^T$. Prvně si uvědomme, že pokud matice A je rozměrů $m \times n$, pak matice A^T je rozměru $n \times m$. Násobení matic $A^T A$ tedy dává smysl a jeho výsledkem je matice rozměru $n \times n$.

Dále dle věty o vlastnostech transpozice víme, že pro všechny matice D, E vhodných rozměrů (takových aby šly vynásobit) platí $(DE)^T = E^T D^T$. Proto dostáváme:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T && \text{(dle } (DE)^T = E^T D^T\text{)} \\ &= A^T A. && \text{(předchozí tvrzení)} \end{aligned}$$

(n) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(o) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.

(p) Tvrzení platí pouze pokud A je matice řádu $m \times n$ pro nějaké m a n shodující se s I_n. Jinak levá strana nedává smysl.

Cv. 3.5 Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$.

Komutuje součin matic, pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:

Pro první část můžeme vybrat například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení neplatí ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq \\ &\neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = BA. \end{aligned}$$

Cv. 3.6 Dokažte nebo vyvraťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B, pak A komutuje s B^T.

Řešení:

(a) Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.

(b) Tvrzení neplatí, například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Diskutujte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0\ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Řešení:
Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

S dolní trojúhelníkovou maticí je to stejné. To jest, matice je regulární právě tehdy, když jsou všechny prvky na diagonále nenulové. Zdůvodnění je jednoduché – transpozicí matice ji převedeme na horní trojúhelníkovou matici a uvědomíme si, že transpozice zachovává regularitu.

Cv. 4.2 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Řešení:
Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$-násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha\frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n-1$.

Cv. 4.3 Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Elementárními řádkovými úpravami převedeme $(A \mid I_3)$ na redukovaný odstup-

ňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&5&0&1&0\\3&5&10&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\3&5&10&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&-1&1&-3&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&-1&1&-3&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-3&2&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&-1&1&-3&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-3&2&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&2&-1&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&-3&2&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&-0.5&-0.5&0.5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2.5&2.5&-0.5\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&-0.5&-0.5&0.5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2.5&2.5&-0.5\\0&1&0&2.5&-0.5&-0.5\\0&0&1&-0.5&-0.5&0.5\end{array}\right).$$

Máme tedy $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&5&-1\\5&-1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

Cv. 4.4 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Připomeňme, že elementární operace a příslušné matice jsou:

(a) Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha\neq 0$ lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_i(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\alpha&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&\dots&0&1\end{pmatrix}.$$

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i\neq j$, lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}(\alpha)=\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&0&\dots&\dots&0\\&\ddots&\ddots&&\vdots\\&&1&\ddots&\vdots\\&\alpha&&\ddots&0\\&&&&1\end{pmatrix}\\ & \end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ i\\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} & \\ \hline \end{array}$$

(c) Výměna i-tého a j-tého řádku jde reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}=\begin{array}{c}\\ i\\ \\ j\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}&&&&\\&0&&1&\\&&&&\\&1&&0&\\&&&&\end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc}i&j\end{array}$$

Řešení:
Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je podle kuchařky na invertování matic. První matici invertujeme takto:

$$(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).$$

Druhou:

$$(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).$$

Třetí:

$$(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu elementárních matic. První matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je representováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Druhá matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Třetí matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} inverzní sama k sobě.

Cv. 4.5 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:
Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 4.6 Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Řešení:

S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned} &(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} \\ &\quad = IA - B^T A^{-1} A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\ &\quad = IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\ &\quad = A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení maticí } I\text{]} \\ &\quad = A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\ &\quad = A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\ &\quad = A. \end{aligned}$$

Celý výraz se tak zjednodušil na matici A.

Cv. 4.7 (a) Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární matice. Najděte limitu (pokud nevíte, co je limita, tak použijte intuici)

$$\lim_{k\to\infty} AD^k A^{-1}, \quad \text{kde} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

a určete její hodnost.

(c) Aplikujte předchozí na matici A, jejíž první sloupec i řádek je tvořený jednotkovým vektorem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Řešení:

(a) Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože $(ABA^{-1})^1 = AB^1A^{-1}$.

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k-1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1})\\ &= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1}\\ &= AB^kA^{-1}.\end{aligned}$$

(b) Podle předchozího bodu máme

$$\begin{aligned}AD^kA^{-1} &= A\begin{pmatrix}1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{2^k} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n^k}\end{pmatrix}A^{-1}\\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} A\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}A^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*}.\end{aligned}$$

Matice má hodnost 1, neboť je vnějším součinem dvou vektorů.

(c) Je-li $A_{*1} = e_1$ a $A_{1*} = e_1^T$, pak nutně totéž platí i pro inverzní matici, konkrétně $(A^{-1})_{1*} = e_1^T$. Tudíž

$$\lim_{k\to\infty} AD^kA^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*} = e_1e_1^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Grupy a tělesa

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,

(g) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(h) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Řešení:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ není grupou, protože neexistuje inverzní prvek k 0.

(b) $(\mathbb{Q}, -)$ není grupou, protože rozdíl racionálních čísel není asociativní. Například $(8-6)-1 = 1 \neq 3 = 8-(6-1)$.

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$ není grupou, protože není zaručena existence neutrálního prvku. Pro libovolné $a < 0$ je $a \circ e = |ae| > 0 > a$ pro všechna e, tudíž žádné e nemůže splňovat definici neutrálního prvku pro záporná a.

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$ není grupou, protože aritmetický průměr čísel není asociativní. Například pro $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ máme $a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5+7}{2}\right) = 3.5 \neq 5 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+5}{2} + 7\right) = (a \circ b) \circ c$.

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$, je grupou. Asociativita platí z asociativity a komutativity sčítání nad $\mathbb{Q}$. Neutrální prvek je $e = -3$, protože pro každé $a \in \mathbb{Q}$ platí

$$a \circ e = a + (-3) + 3 = a = (-3) + a + 3 = e \circ a.$$

Konečně, inverzní prvek pro každé $a \in \mathbb{Q}$ je $b = -a - 6$, protože

$$a \circ b = a + (-a-6) + 3 = -3 = e = -3 = (-a-6) + a + 3 = b \circ a.$$

(f) $(\mathcal{F}, +)$ je grupou. Asociativita plyne z definice součtu funkcí a asociativity sčítání nad $\mathbb{R}$. Pro každé $f, g, h \in \mathcal{F}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$. Neutrální prvek je identicky nulová funkce $e(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Inverzní prvek pro každou $f \in \mathcal{F}$ je funkce $-f$.

(g) Je grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení. Neutrálním prvkem je například rotace o 360 stupňů. Inverzním prvkem k rotaci o úhel α je rotace o úhel α v opačném směru.

(h) Je grupou. Asociativita plyne z asociativity skládání zobrazení. Neutrálním prvkem je identické zobrazení $e((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T$ (tj. posunutí vektorem $(0,0)^T$) a inverzím prvkem ke každému posunutí $t((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T + (a,b)^T$ je posunutí $t^{-1}((x_1,x_2)^T) = (x_1,x_2)^T - (a,b)^T$.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G,\circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Řešení:
Všechny tabulky jsou určeny jednoznačně. Fakt, že 0 je neutrálním prvkem pro $\circ$ určuje první řádek i sloupec tabulky. Existence levé i pravé inverze omezuje pozice 0 na diagonále nebo symetricky podle diagonály. Asociativita vynutí zbylé pozice. Dostáváme:

(a)

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

- aditivní grupu modulo 2,

(b)

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

– aditivní grupu modulo 3,

(c)

$\circ$	0
0	0

– triviální grupu,

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

– Kleinovu grupu, tj. grupu symetrií obdélníka, anebo grupu

$\circ$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	1	0
3	3	2	0	1

, což je $\mathbb{Z}_4$ s přejmenovanými čísly.

Cv. 5.3 Nechť $(G, \circ)$ je grupa a $x \in G$. Rozhodněte, zda $(G, *)$ je grupou s operací definovanou $a * b = a \circ x \circ b$ pro všechna $a, b \in G$.

Řešení:
Ověříme definici grupy. Nová operace je asociativní, jelikož $\circ$ je asociativní. Pro všechna $a, b, c, x \in G$ platí:

$$a * (b * c) = a \circ x \circ (b \circ x \circ c) = (a \circ x \circ b) \circ x \circ c = (a * b) * c,$$

kde jsme prostřední rovnost dostali díky asociativitě $\circ$ na G aplikované na prvky $\alpha = a \circ x, \beta = b$ a $\gamma = x \circ c$ grupy G.

Označme E neutrální prvek v $(G, \circ)$. Neutrálním prvkem $(G, *)$ je inverzní prvek x vzhledem k $\circ$, tj. $e = x^{-1}$ vzhledem k $\circ$. Ověříme pro všechna $a, x \in G$:

$$e * a = x^{-1} \circ x \circ a = E \circ a = a = a \circ E = a \circ x \circ x^{-1} = a * e.$$

Podobně, inverzní prvek pro každé $a \in G$ v grupě G je $b = x^{-1} \circ a^{-1} \circ x^{-1}$, kde a^{-1} je inverzní prvek k a v grupě $(G, \circ)$. Ověříme pro všechna $a, x \in G$:

$$\begin{aligned} a * b &= a \circ x \circ x^{-1} \circ a^{-1} \circ x^{-1} = a \circ E \circ a^{-1} \circ x^{-1} = a \circ a^{-1} \circ x^{-1} = E \circ x^{-1} \\ &= x^{-1} = e \\ &= x^{-1} \circ E = x^{-1} \circ a^{-1} \circ a = x^{-1} \circ a^{-1} \circ E \circ a = x^{-1} \circ a^{-1} \circ x^{-1} \circ x \circ a \\ &= b * a. \end{aligned}$$

Cv. 5.4 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

(a) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým součinem,

(b) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým součinem.

Řešení:

(a) Ano. Nejdříve ukážeme, že maticový součin je uzavřený pro danou množinu. Pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

což je matice náležející do zadané množiny ($z = a + b \in \mathbb{Z}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$).

Asociativita maticového součinu na dané množině plyne z asociativity maticového součinu pro obecné čtvercové matice stejných rozměrů.

Neutrálním prvkem je jednotková matice řádu dva, jež patří do zadané množiny ($z = 0 \in \mathbb{Z}$).

Konečně, inverzním prvkem pro libovolnou matici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ je celočíselná matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, což plyne z rovnosti (1).

Zadaná množina matic spolu s maticovým součinem tvoří grupu. Zbývá ověřit, zda je maticový součin pro tyto matice komutativní. Komutativita maticového součinu plyne z rovnosti (1) a komutativity sčítání nad $\mathbb{Z}$. Ověřili jsme tedy, že se jedná o Abelovskou grupu.

(b) Ano. Nejdříve ukážeme, že maticový součin je uzavřený pro danou množinu. Pro všechna $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{pmatrix}, \tag{2}$$

což je matice náležející do zadané množiny ($2ab \neq 0$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Asociativita maticového součinu na dané množině plyne z asociativity maticového součinu pro obecné čtvercové matice.

Neutrálním prvkem je matice $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, jež patří do zadané množiny.

Konečně, pro všechna $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je inverzním prvkem pro matici $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right)$ matice $\frac{1}{4a}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, což plyne z rovnosti (2) (všimněte si, že inverzní prvek je definován, protože $a \neq 0$).

Zadaná množina matic spolu s maticovým součinem tvoří grupu. Zbývá ověřit, zda je maticový součin pro tyto matice komutativní. Komutativita maticového součinu plyne z rovnosti (2) a komutativity součinu nad $\mathbb{R}$. Ověřili jsme tedy, že se jedná o Abelovskou grupu.

Cv. 5.5 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ a $4/3$ v $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6 + 7$, -7, $6 \cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Řešení:

(a) Těleso $\mathbb{Z}_5$ je definováno jako množina všech zbytků v $\mathbb{Z}$ po dělení 5 spolu s operacemi součtu a součinu modulo 5. Sčítat modulo 5 lze jednoduše. Pro ostatní výpočty v $\mathbb{Z}_5$ nám poslouží tabulka pro operaci součinu modulo 5.

$\mathbb{Z}_5, \cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Všimněte si, že z tabulky je vidět, že množina $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$ se součinem modulo 5 tvoří grupu – takzvanou multiplikativní grupu modulo 5. Toto není překvapivé, protože těleso je definováno jako množina $\mathbb{T}$ s operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$ na $\mathbb{T}$, takovými že $(\mathbb{T}, +)$ je grupa s neutrálním prvkem 0 a $(\mathbb{T} \setminus \{0\}, \cdot)$ je také grupa.

Nyní můžeme vyhodnotit zadané výrazy v $\mathbb{Z}_5$, kde při výpočtu nalezneme multiplikativní inverzi k libovolnému $a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ v tabulce tak, že v řádku s a najdeme hodnotu 1 a index b odpovídajícího sloupce musí být hledaná multiplikativní inverze a^{-1}, protože $a \cdot b = 1$ v $\mathbb{Z}_5$. Dostáváme:

$$((2^{-1} + 1)4)^{-1} = ((3 + 1)4)^{-1} = (4 \cdot 4)^{-1} = (1)^{-1} = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_5$$

a

$$4/3 = 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 3 \text{ v } \mathbb{Z}_5.$$

(b) Postupujeme podobně jako pro $\mathbb{Z}_5$, ale nebudeme konstruovat celou tabulku pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} 6 + 7 &= 6 + 7 \pmod{11} = 2 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}, \\ -7 &= 11 - 7 \pmod{11} = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}. \\ 6 \cdot 7 &= 6 \cdot 7 \pmod{11} = 42 \pmod{11} = 9 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}. \end{aligned}$$

Při hledání multiplikativní inverze k prvku 7 můžeme postupovat jako při výpočtu řádku odpovídajícího 7 v tabulce pro součin v $\mathbb{Z}_{11}$. Výpočet zastavíme v momentě, kdy uvidíme 1:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 1 &= 7, \\ 7 \cdot 2 &= 3, \\ 7 \cdot 3 &= 10, \\ 7 \cdot 4 &= 6, \\ 7 \cdot 5 &= 2, \\ 7 \cdot 6 &= 9, \\ 7 \cdot 7 &= 5, \\ 7 \cdot 8 &= 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$7^{-1} = 8 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Tuto hodnotu využijeme i při posledním výpočtu:

$$6/7 = 6 \cdot 7^{-1} = 6 \cdot 8 = 48 \pmod{11} = 4 \text{ v } \mathbb{Z}_{11}.$$

Cv. 5.6 Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1, \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Řešení:
Postupujeme podobně jako pro soustavy rovnic nad $\mathbb{R}$. Využijeme toho, že eliminovat prvky pod pivotem můžeme přičtením vhodného násobku řádku s pivotem. Přičtením 2-násobku prvního řádku k druhému dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Za volné proměnné zvolíme parametry $y, z \in \mathbb{Z}_5$ a vyjádříme

$$x = 3^{-1}(1 - 2y - z) = 2(1 + 3y + 4z) = 2 + y + 3z.$$

Množina všech řešení dané soustavy je tedy

$$\{(2,0,0)^T + y(1,1,0)^T + z(3,0,1)^T \mid y, z \in \mathbb{Z}_5\}.$$

Máme $25 = 5 \cdot 5$ různých voleb parametrů y a z a mohutnost množiny řešení je tedy 25.

Cv. 5.7 Nalezněte multiplikativní inverze 9^{-1} a 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{31}$.

Řešení:
Mohli bychom postupovat stejně jako pro $\mathbb{Z}_{11}$, ale výpočet by mohl trvat 31 kroků pro zkonstruování celého řádku odpovídajícího prvku 9 v tabulce pro součinu v $\mathbb{Z}_{31}$. Efektivní metodou je použití rozšířeného Euklidova algoritmu jehož výstupem je kromě největšího společného dělitele NSD$(9, 31)$ také dvojice celočíselných hodnot $a, b \in \mathbb{Z}$, pro které platí

$$1 = \mathrm{NSD}(9, 31) = a \cdot 9 + b \cdot 31.$$

Tudíž nalezená hodnota $a \pmod{31}$ je multiplikativní inverze prvku 9 v $\mathbb{Z}_{31}$. Rozšířený Euklidův algoritmus na vstupu $(9, 31)$ provede následující kroky:

$$\begin{aligned} a_0 &= 31, \\ a_1 &= 9, \\ a_2 &= 4 = 31 - 3 \cdot 9, \\ a_3 &= 1 = 9 - 2 \cdot 4 = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31. \end{aligned}$$

Poslední hodnota a_3 je hledaný NSD$(9, 31)$, o kterém jsme věděli, že musí vyjít roven 1, protože 31 je prvočíslo. Navíc jsme dostali 1 vyjádřené jako součet celočíselných násobků 9 a 31. Můžeme tedy odvodit, že

$$1 = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31 = 7 \cdot 9 - 2 \cdot 31 \pmod{31} = 7 \cdot 9 \pmod{31}.$$

Proto $9^{-1} = 7$ v $\mathbb{Z}_{31}$.

Pro prvek 12 dostáváme:

$$\begin{aligned} a_0 &= 31, \\ a_1 &= 12, \\ a_2 &= 7 = 31 - 2 \cdot 12, \\ a_3 &= 5 = 12 - 7 = 3 \cdot 12 - 31, \\ a_4 &= 2 = 7 - 5 = 31 - 2 \cdot 12 - 3 \cdot 12 + 31 = 2 \cdot 31 - 5 \cdot 12, \\ a_5 &= 3 = 5 - 2 = 3 \cdot 12 - 31 - 2 \cdot 31 + 5 \cdot 12 = 8 \cdot 12 - 3 \cdot 31, \\ a_6 &= 1 = 3 - 2 = 8 \cdot 12 - 3 \cdot 31 - 2 \cdot 31 + 5 \cdot 12 = 13 \cdot 12 - 5 \cdot 31. \end{aligned}$$

Opět jsme dostali 1 vyjádřené jako součet celočíselných násobků 12 a 31. Můžeme tedy odvodit, že

$$1 = 13 \cdot 12 - 5 \cdot 31 = 13 \cdot 12 - 5 \cdot 31 \pmod{31} = 13 \cdot 12 \pmod{31}.$$

Proto $12^{-1} = 13$ v $\mathbb{Z}_{31}$.

Cv. 5.8 V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Řešení:

Nad konečným tělesem musí být posloupnost matic A^i pro $i = 1, \ldots, \infty$ cyklická. Spočtěme několik prvních členů této posloupnosti:

$$\begin{aligned}
A = A^1 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^4 &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^6 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A^7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A.
\end{aligned}$$

Vidíme, že perioda této posloupnost je 6. Hledanou mocninu matice tedy spočítáme jako

$$A^{100} = A^{100 \pmod{6}} = A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou.

Řešení:
Permutace p zobrazuje $1 \to 2$, dále $2 \to 3$,$3 \to 4$ a $4 \to 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1, 2, 3, 4)$, analogicky druhý cyklus je $(5, 6) \implies p = (1, 2, 3, 4)(5, 6)$. Podobně pro permutaci q máme $1 \to 1$ (první cyklus), $2 \to 3$,$3 \to 2$ (druhý cyklus) a $4 \to 5$,$5 \to 6$,$6 \to 4$ (třetí cyklus). Permutaci q lze zapsat pomocí cyklů jako $q = (1)(2, 3)(4, 5, 6)$.

Permutace p je zadána na $n = 6$ prvcích a skládá se ze $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{n-c} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\operatorname{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p, tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídit sloupce od nejmenšího po největší. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4, 3, 2, 1)(6, 5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzní.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat pomocí popisu přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1, 2, 4, 6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1, 3, 5, 4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Řešení:
K permutaci p^9 se nejrychleji dostaneme tak, že spočítáme $p^2 = p \circ p$, následně $p^4 = p^2 \circ p^2$, $p^8 = p^4 \circ p^4$ a nakonec $p^9 = p^8 \circ p$.

Dostáváme

- $p^2 = (1, 4, 3)(2)(5)(6, 10, 8)(7, 11, 9)$,
- $p^4 = (1, 3, 4)(2)(5)(6, 8, 10)(7, 9, 11)$,
- $p^8 = (1, 4, 3)(2)(5)(6, 10, 8)(7, 11, 9)$,
- $p^9 = (1)(2, 5)(3)(4)(6, 9)(7, 10)(8, 11)$.

Pro p^{-14} nejprve určíme stejným způsobem $p^{14} = p^8 \circ p^4 \circ p^2$ a následně spočítáme inverzní zobrazení. Dostáváme

- $p^{14} = (1, 4, 3)(2)(5)(6, 10, 8)(7, 11, 9)$
- $p^{-14} = (1, 3, 4)(2)(5)(6, 8, 10)(7, 9, 11)$.

Abychom určili nejmenší mocninu $k \geq 1$ takovou, že $p^k = id$, podíváme se na mocniny, které se budou chovat jako id na jednotlivých cyklech. První cyklus má délku 3, tedy každý prvek v něm obsažený bude vždy po 3 iteracích zpátky na svém místě. Prvnímu cyklu tedy odpovídá mocnina $3k_1$, kde $k_1 \geq 1$. Podobně pro druhý cyklus délky 2 potřebujeme, aby byla mocnina násobek 2 a pro třetí cyklus délky 6 mocninu, která je násobkem 6. Nejmenší společný násobek čísel $2, 3, 6$ je 6, tedy $k = 6$. První cyklus se *protočí* 2-krát, druhý 3-krát a poslední 1-krát.

Cv. 6.3 Určete znaménko permutací r, s, kde

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = (1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$$

Řešení:
Permutaci r můžeme pomocí cyklů zapsat jako

$$r = \begin{cases} (1, n)(2, n-1) \dots (\frac{n}{2}, \frac{n+2}{2}) & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (1, n)(2, n-1) \dots (\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2})(\frac{n+1}{2}) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

V prvním případě máme $\frac{n}{2}$ cyklů, v druhém $\frac{n-1}{2}$ cyklů. Celkově tedy dostáváme, že

$$\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{n - \text{počet cyklů}} = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (-1)^{n-\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Znaménko permutace s můžeme spočítat pomocí počtu *inverzí*. Inverze je dvojice prvků (i, j), taková, že $i > j$ a i se v cyklu nachází před j. Určíme:

- $2n-1$: $(2n-1, 2), (2n-1, 4), \dots, (2n-1, 2n-2)$ - dohromady $n-1$ inverzí,
- $2n-3$: $(2n-3, 2), (2n-3, 4), \dots, (2n-3, 2n-4)$ - dohromady $n-2$ inverzí,
- $\vdots$

- $3 : (3,2)$ - dohromady 1 inverze.

Celkově tedy máme $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ inverzí, proto $\operatorname{sgn}(s) = (-1)^{\text{počet inverzí}} = \operatorname{sgn}(s) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Cv. 6.4 Najděte všechny permutace komutující s $p = (1,2)(3)$.

Řešení:
Pro p máme celkem $3! = 6$ možných permutací, otestováním všech permutací dostaneme, že jediné 2 možnosti jsou p a id.

Cv. 6.5 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1,3)(2,4)(7,8,9,10)$.

Řešení:
Podívejme se nejprve, jak může vzniknout cyklus $(1,3)$. Aby se 1 zobrazilo na 3 v p^2, musí v p být součástí nějaké cyklu $(\dots,1,a,3,\dots)$. Podobně aby se 3 zobrazilo na 1, musí být $(\dots,3,b,1,\dots)$. Spojením obou úseků dostáváme $(\dots,1,a,3,b,1,\dots)$, tedy nutně cyklus $(1,a,3,b)$. V permutaci p^2 se tento cyklus rozpadne na 2 podcykly $(1,3)(a,b)$. Ze struktury p^2 je jediná možnost, že $a = 2, b = 4$ nebo symetricky $a = 4, b = 2$.

Aby se dále prvky 5 a 6 zobrazily v p^2 sami na sebe, musí se buď oba zobrazit sami na sebe už v p, nebo tvořit cyklus o dvou prvcích $(5,c),(6,d)$. Pokud by libovolné z čísel byl součástí delšího cyklu, složením permutace sama se sebou bychom už nedostali (5), resp. (6). Ze struktury p^2 dále nutně vyplývá, že $c = 6$ a $d = 5$, jinak by (d) a (c) nebyly cykly z p^2.

Zbývá určit $p(7),\dots,p(10)$. Podobně jako v případě prvků 1, 3 odvodíme, že musí existovat úsek $(\dots,7,e,8,f,9,g,10,h,7,\dots)$, resp. cyklus $(7,e,8,f,9,q,10,h,7)$, který ale nejsme schopni pouze s pomocí prvků $7,\dots,10$ zkonstruovat. Z toho důvodu žádná permutace p nesplňuje zadání.

Cv. 6.6 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Řešení:
Abychom dokázali toto tvrzení, stačí ukázat, že složení dvojice permutací $p, q \in S_n$ je *prosté* a *na*. Poté se bude jednat o bijekci na konečné množině, což odpovídá definici permutace. Toto půjde jednoduše dokázat z faktu, že obě permutace tyto vlastnosti splňují.

Prosté: Mějme $x, y \in \{1,\dots,n\}$ a nechť platí

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(q(y)) = (p \circ q)(y).$$

Protože zobrazení p je prosté, platí, že nutně $q(x) = q(y)$. Nyní využijeme toho, že je prosté q a tedy platí, že $x = y$. Tedy i zobrazení $(p \circ q)$ je prosté.

Na: Aby platila tato vlastnost, musí pro každé $x \in \{1,\dots n\}$ existovat prvek $y \in \{1,\dots,n\}$ takové, že $(p \circ q)(y) = p(q(y)) = x$. Protože zobrazení p je „na“, tak existuje $z \in \{1,\dots,n\}$ takové, že $p(z) = x$. Zároveň z vlastnosti na permutace q existuje y, že $q(y) = z$. Toto y splňuje tedy vztah $q(p(y)) = x$.

Cv. 6.7 Dokažte, že znaménko permutace p lze ekvivalentně definovat jako $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^s$, kde s je počet cyklů p sudé délky.

Řešení:
Každý cyklus můžeme zapsat pomocí transpozic jako

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-1}, i_k).$$

Cyklus délky k tedy můžeme zapsat pomocí $k - 1$ transpozic, tedy znaménko sudého cyklu je $(-1)^{k-1} = (-1)$, zatímco znaménko lichého cyklu $(-1)^{k-1} = 1$. Znaménko permutace o ℓ cyklech můžeme zapsat jako součin znamének jednotlivých cyklů. Vidíme, že cykly liché délky přispějí do celkového součinu hodnotou 1, zatímco cykly sudé délky hodnotou (-1). Stačí proto uvažovat pouze sudé cykly a skutečně platí, že $\mathrm{sgn}(p) = (-1)^s$, kde s je počet cyklů sudé délky.

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

<u>Řešení:</u>
Pokud S_a má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$, tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x+x')+2(y+y')-3(z+z') = (x+2y-3z)+(x'+2y'-3z) = 0+0 = 0$, a tedy i $(x+x', y+y', z+z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0. Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y, podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

Cv. 7.2 Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Řešení:</u>
Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := (1, 6, 0, 1)^T$ a $w_2 = (0, 4, 1, 0)^T$, máme vlastně vyřešit rovnici $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 = rw_1+sw_2$, neboli $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+r(-w_1)+s(-w_2)=0$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\2&2&0&-6&-4\\1&3&9&0&-1\\1&1&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&2&-2&-4&-4\\0&3&8&1&-1\\0&1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&3&8&1&-1\\0&1&-1&0&0\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&7&6\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0\\0&1&-1&-2&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že $r=0$ a $s=0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0\cdot w_1+0\cdot w_2$, čili nulový vektor.

Cv. 7.3 Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Řešení:
Ano, 3^{11}.

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}6\\2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\5\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\6\\3\end{pmatrix}\right\}\bigcap\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}5\\0\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\6\\6\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Řešení:
Označme dané vektory v_1,v_2,v_3 a w_1,w_2,w_3. Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1+yv_2+zv_3=rw_1+sw_2+tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r,s,t vyšly a těmi přenásobit w_1,w_2,w_3. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49.

Cv. 7.5 Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i\in\mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i\in\mathbb{N}\}$?

Řešení:
Neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to b není.

Cv. 7.6 Je-li $\mathbb{T}$ (komutativní) těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

jako lineární obal vektorů.

Řešení:
Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. ve tvaru

$$\{r \cdot (0, 1, -2, 0)^T + s \cdot (6, 1, 0, -2)^T;\ r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tedy výsledkem je $\mathrm{span}\{(0, 1, -2, 0)^T, (6, 1, 0, -2)^T\}$.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$(1, 2, -1, 0)^T \text{ a } (1, 0, 0, 1)^T.$$

Řešení:
Hledáme vlastně taková čísla a, b, c, d, aby platilo

$$\begin{aligned} 1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c + 0 = 0, \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0. \end{aligned}$$

Jinými slovy řešíme homogenní rovnici s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nestačí však najít jedno řešení (to by množina řešení výsledné soustavy mohla vyjít větší než onen požadovaný lineární obal).
Výsledkem je například homogenní soustava $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)$, $(1,-1,1)$, $(3,2,-2)$.

(b) $(2,0,3)$, $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$.

Řešení:

(a) Hledáme koeficienty $a,b,c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho tedy dostaneme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Všimněte si, že jednotlivé vektory jsou ve sloupcích matice. Vyřešením soustavy zjistíme, že má řešení pouze $a = b = c = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé.

(b) Obdobně jako v (a) vytvoříme soustavu

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pomocí Gaussovy eliminace dostaneme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i nějaké netriviální řešení a vektory jsou tedy lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že řešení soustavy je $a = -t$, $b = 2t$, $c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Tedy například s koeficienty -1, 2 a 1 dostaneme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.2 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

(a) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$.

(b) $\{u - v,\ u - w,\ v - w\}$.

Řešení:

(a) Obdobně jako v předchozím příkladě hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, aby
$$0 = au + b(u + v) + c(u + w) = (a + b + c)u + bv + cw.$$
Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $a+b+c = 0$, $b = 0$ a $c = 0$ a tedy i $a = 0$. Odtud je $\{u, u + v, u + w\}$ lineárně nezávislá.

(b) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že
$$0 = a(u - v) + b(u - w) + c(v - w) = (a + b)u + (-a + c)v + (-b - c)w.$$
Tedy $a+b = 0$, $-a+c = 0$ a $-b-c = 0$. Vyřešením dané soustavy dostaneme řešení $a = t, b = -t, c = t$ pro parametr $t \in \mathbb{R}$. Vektory $\{u-v, u-w, v-w\}$ jsou tedy lineárně závislé, např. s koeficienty $(1, -1, 1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, je X závislá.

Řešení:
Obecně dle definice se nezávislost přenáší „dolů" a závislost „nahoru". Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1, 0)^T\}$ a $Y = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.

(b) Neplatí: $X = \{(1, 0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.

(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1 \dots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$
Vezměme $\beta_1, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.

(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).

(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.4 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.1, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé a nad $\mathbb{Z}_3$ jsou lineárně závislé. Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa, nad kterým je daný vektorový prostor.

Cv. 8.5 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{0\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:
Mějme 2 vyjádření vektoru x:

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V.

Pokud tedy $U \cap V = \{0\}$, pak $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z čehož, ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x tedy je jednoznačné.

Na druhou stranu, pokud vyjádření x není jednoznačné, pak $u_1 \neq u_2$ nebo $v_1 \neq v_2$ (ve skutečnosti musí nastat obě možnosti). Nechť tedy $u_1 \neq u_2$ (druhý případ je obdobný). Pak ale $u_1 - u_2 \neq 0$. Vektor $u_1 - u_2$ však leží jak v U tak ve V. Průnik $U \cap V$ tedy obsahuje i nenulový vektor.

Cv. 8.6 Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

(d) $\{\sin(x+1),\ \sin(x+2),\ \sin(x+3)\}$.

(e) $\{\ln(x),\ \log_{10}(2x),\ \log_2(x^2)\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x - 2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot f(x) + b \cdot g(x) + c \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pokud tedy dosadíme za f, g a h dostaneme:

$$a \cdot (2x - 1) + b \cdot (x - 2) + c \cdot 3x = (2a + b + 3c) \cdot x + (-a - 2b) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy když:

$$\begin{aligned} 2a + b + 3c &= 0, \\ -a - 2b &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má netriviální řešení například $(-2, 1, 1)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(b) Opět hledáme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$a \cdot (x^2 + 2x + 3) + b \cdot (x + 1) + c \cdot (x - 1) = a \cdot x^2 + (2a + b + c) \cdot x + (b - c) = 0.$$

Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tato soustava má jen triviální řešení $(0, 0, 0)$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Snažíme se splnit rovnici $a \sin x + b \cos x = 0$. Pokud dosadíme $x = 0$, pak dostaneme $b = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak dostaneme $a = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

(d) Ze součtových vzorců pro $\sin x$ máme:

$$\begin{aligned} \sin(x + 1) &= \sin(x) \cdot \cos(1) + \cos(x) \cdot \sin(1), \\ \sin(x + 2) &= \sin(x) \cdot \cos(2) + \cos(x) \cdot \sin(2), \\ \sin(x + 3) &= \sin(x) \cdot \cos(3) + \cos(x) \cdot \sin(3). \end{aligned}$$

Sestavíme tedy rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot \sin(x + 1) + b \cdot \sin(x + 2) + c \cdot \sin(x + 3) \\ &= \big(a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3)\big) \cdot \sin(x) \\ &\quad + \big(a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3)\big) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

Jelikož jsou sin a cos lineárně nezávislé, pak musí platit:

$$\begin{aligned} a \cdot \cos(1) + b \cdot \cos(2) + c \cdot \cos(3) &= 0, \\ a \cdot \sin(1) + b \cdot \sin(2) + c \cdot \sin(3) &= 0. \end{aligned}$$

Což je homogenní soustava o 2 rovnicích a 3 neznámých, musí mít tedy nějaké netriviální řešení. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

(e) Platí následující rovnosti: $\log_{10}(2x) = \frac{\ln x + \ln 2}{\ln 10}$ a $\log_2(x^2) = \frac{2 \ln x}{\ln 2}$. V rovnici $a \cdot \ln(x) + b \cdot \log_{10}(2x) + c \cdot \log_2(x^2) = 0$ jsou první a poslední člen vzájemnými násobky. Rovnice má tedy netriviální řešení, například $(a, b, c) = (-2, 0, \ln 2)$. Funkce jsou tedy lineárně závislé.

9. Báze a dimenze

Cv. 9.1 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ vyjádřete vektor $(3,2,4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(3,3,2)^T$, $(1,1,4^T)$ a $(0,2,1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Řešení:
Vyřešíme soustavu rovnic, která vznikne tak, že vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ dáme do sloupců matice a vektor $(3,2,4)^T$ použijeme jako vektor pravé strany.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Dostaneme řešení $x_3 = 2$, $x_2 = p$ a $x_1 = 1 + 3p$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1+3p)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení tedy není jednoznačné a vektory $(3,3,2)^T$, $(1,1,4)^T$ a $(0,2,1)^T$ netvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$.

Cv. 9.2 Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \left\{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\right\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \left\{-x^2,\ x+x^2,\ x^3-1\right\}$, V je prostor reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Řešení:

(a) Prostor V má dimenzi 4, proto je třeba rozšířit M o jeden vektor (pokud je množina M lineárně nezávislá). Z věty o výměně platí, že alespoň jeden z vektorů kanonické báze je nezávislý na vektorech z M. Nezávislost zjistíme současným vyřešením rovnic $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = e_i$, kde u_1, u_2, u_3 jsou vektory z M a e_i jsou vektory kanonické báze. Dostáváme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right).$$

Protože poslední řádek obsahuje pivot ve všech sloupcích na pravé straně, vidíme, že doplněním o libovolný vektor e_i se stane množina M bází prostoru $\mathbb{R}^4$.

(b) Zkusíme doplnit M o některý vektor z kanonické báze $1, x, x^2, x^3$. Máme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že buď $M \cup \{1\}$ nebo $M \cup \{x^3\}$ (a i mnoho jiných možností, které jsme však netestovali) tvoří bázi V, nikoli však $M \cup \{x\}$ nebo $M \cup \{x^2\}$.

Cv. 9.3 Souřadnice vektoru u vůči bázi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = \{v_1 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_4,\ v_2\}$.

Řešení:
Hledáme taková $(b_1, \dots, b_4)^T = [u]_Y$, aby platilo

$$b_1(v_1 + v_4) + b_2(v_2 + v_3) + b_3 v_4 + b_4 v_2 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4.$$

Protože je X báze, jsou koeficienty u v_i jsou jednoznačné. Dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 + b_4 &= a_2 \\ b_2 &= a_3 \\ b_1 + b_3 &= a_4 \end{aligned}$$

Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1,\ a_3,\ a_4 - a_1,\ a_2 - a_3)^T$.

Cv. 9.4 Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \operatorname{span}\big\{(4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T, (2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big\}$.

(b) $V = \big\{(x_1, \dots, x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\big\}$.

Řešení:

(a) Z generátorů sestavíme matici (vektory změníme na řádkové) a tuto matici převedeme na odstupňovaný tvar. Elementární úpravy nemění řádkový prostor, výsledné nenulové řádky tvoří tedy hledanou bázi.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze U je tedy 3 a báze U je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T, (0,1,1,0,2,3,1)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T$.

(b) Z rovnic sestavíme soustavu a budeme hledat bázi jejího řešení. Konkrétně dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešením je

$$x = p_1(2,1,0,0,0,0,0)^T + p_2(1,0,2,1,0,0,0)^T + \\ + p_3(1,0,1,0,1,0,0)^T + p_4(1,0,4,0,0,3,1)^T.$$

Vektory u parametrů tvoří bázi prostoru řešení, mj. je okamžitě vidět, že dimenze tohoto prostoru je rovna počtu volných proměnných.

Dimenze V je tedy 4 a báze V je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T$, $(1,0,2,1,0,0,0)^T$, $(1,0,1,0,1,0,0)^T$, $(1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Cv. 9.5 Rozhodněte, zda prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Řešení:

Dimenze podprostoru je menší než dimenze prostoru. Dimenze jsme již určili dříve v předchozím příkladu, můžeme tedy okamžitě vyloučit případ $V \subseteq U$. Zbývá ověřit, zdali jsou prostory v opačné inkluzi, nebo jsou-li inkluzí neporovnatelné. K tomu stačí zjistit, jestli $\dim(\mathrm{span}(U \cup V)) = \dim(V) = 4$.

Popřípadě se také můžeme pokusit vyjádřit vektory báze menšího prostoru jako lineární kombinace větší báze (což je vlastně totéž).

$$\begin{array}{cccc|ccccccc|}
 & & & & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{2} & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 4 & 3 \\
\multicolumn{1}{|c}{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
\multicolumn{1}{|c}{0} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Zde řádky první matice udávají souřadnice vektorů báze U vůči bázi V (obě tyto báze jsme si zvolili výše). Všimněte si, že se souřadnice dají snadno určit z 2., 4., 5. a 7. složky vektoru a uvědomte si proč.

Pro rozšíření báze vyjdeme z libovolné báze menšího prostoru a přidáváme vektory z většího, dokud nedostaneme požadovanou dimenzi.

Platí inkluze $U \subsetneq V$. Tato inkluze se dá nahlédnout i snáze, protože všechny vektory báze U splňují rovnice z definice V.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ platí

(a) $(1,2)^T \in \mathrm{Ker}(A)$,
(b) $(1,2)^T \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n : Ax = o\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax : x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $(1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = o$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = (1,2)^T$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří do jádra matice A, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

(a) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

(a) vektor $(1,2)^T$ nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor $(1,2)^T$ patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Převedeme matici A do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy $(1,2,0,1)^T, (0,0,1,1)^T$.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = o$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení:

(a) Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Požadovanou vlastnost splňují např. matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ musí platit vztah

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$,
(b) $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí, např. matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\operatorname{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani opačná implikace, např. pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\mathrm{RREF}(A) = \mathrm{RREF}(B) = A$, ale zároveň

$$\operatorname{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Cv. 10.5 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Řešení:
Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice a převedeme ji do (redukovaného) odstupňovaného tvaru

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý, bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3,1,5,4)^T$, $v_2 = (2,2,3,3)^T$ a $v_4 = (1,3,1,1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, platí

$$v_3 = (1,-1,2,1)^T = 1 \cdot (3,1,5,4)^T + (-1) \cdot (2,2,3,3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1,-1,0)$.

Cv. 10.6 Rozhodněte, zda platí $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *(Hint: Jaký je vztah mezi $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{S}(A+B)$?)*

Řešení:
Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je nanejvýš

$$\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A+B$, tedy $\mathcal{S}(A+B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\operatorname{rank}(A+B) = \dim \mathcal{S}(A+B) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Cv. 10.7 Jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$?

Řešení:

(a) Nechť $x \in \operatorname{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\operatorname{Ker}(B) \subseteq \operatorname{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1,0,\ldots,0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\operatorname{Ker}(AB) \subseteq \operatorname{Ker}(B)$, a tedy $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker}(B)$. Nechť $x \in \operatorname{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \operatorname{Ker}(B)$.

11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.1 Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je/není lineárním zobrazením.

(a) $f_1(x) = 0$,

(b) $f_2(x) = 1$,

(c) $f_3(x) = 2x$,

(d) $f_4(x) = x + 1$,

(e) $f_5(x) = x^2$.

Řešení:
Dle definice: Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f\colon U \to V$ je lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in T$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Poznámka: Budeme-li na vektorové prostory nahlížet jako na *algebry*, pak je lineární zobrazení *homomorfismem* algeber, což nám z algebraického hlediska přináší silný pohled a interpretaci lineárního zobrazení, jako zobrazení zachovávajícího strukturu.

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:

i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí

ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je tudíž lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:

i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí

ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zda-li zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa“ $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

Ani jedna podmínka není splněna, zobrazení proto není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:

i. $f_3(x + y) = f_3(z) = 2z = 2(x + y) = 2(x) + 2(y) = f_3(x) + f_3(y)$; podmínka platí

ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$; podmínka platí.

Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

Cv. 11.2 Rozhodněte a dokažte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_6(x,y) = (x+y,\, x-y)$,
(b) $f_7(x,y) = (x-y,\, x-y)$.

Řešení:

(a) Analogicky se předchozím příkladem, je však třeba si dát pozor na indexování vektorů. Ano zobrazení f_6 je lineární.

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení (vůči kanonické bázi).

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Využijeme tvrzení, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. Zobrazení si vyjádříme vůči kanonickým bázím ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$. Vybereme kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$, kterou zobrazením zobrazíme

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{\mathrm{kan}}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_{\mathrm{kan}}.$$

Vyjádřeno vůči kanonické bázi se matice obrazu nezmění je tedy se jedná o matici zobrazení

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) Budeme počítat matici zobrazení vůči kanonickým bázím ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$. A využijeme vyjádření ze znalosti vzoru X a obrazu $FX = Y$.

$$f(X) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Ze vztahu $F = YX^{-1}$ vypočteme matici zobrazení

$$F = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,-3,1)^T) &= (-1,1,0)^T,\\ f((0,3,-2)^T) &= (0,1,-1)^T,\\ f((-1,-2,2)^T) &= (1,0,1^T). \end{aligned}$$

Řešení:

Matici lineárních zobrazení lze vypočítat i ze znalosti vektorů a jejich obrazů. Mějme množinu vektorů X a jejich obrazů Y. Vektory X je na vektory Y zobrazí maticí lineárního zobrazení F pronásobením $FX = Y$. Je-li matice X regulární, pak existuje její inverzní matice X^{-1}. Upravíme rovnici pronásobením maticí X^{-1} zprava, dostáváme $FXX^{-1} = YX^{-1}$, což se rovná $F = YX^{-1}$.

Matice X je maticí vzorových vektorů zapsaných po sloupcích a matice Y je po sloupcích zapsanou maticí obrazů vektorů:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice X^{-1} k matici X se rovná:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice zobrazení F se rovná:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f\colon U \to U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}.$$

Vypočtěte matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$\begin{aligned} f((-1,0,3)^T) &= (-2,0,6)^T \\ f((2,-2,2)^T) &= (4,-4,4)^T \\ f((0,1,-3)^T) &= (0,2,-6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Řešení:

Využijeme definice matice lineárního zobrazení, maticové reprezentace lineárního zobrazení a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze. Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory U a V na tělesem T a lineární zobrazení $f\colon U \to V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$. *Matice lineárního zobrazení* $f\colon U \to V$ je definována tak, že j-tý sloupec ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je $[f(x_j)]_{B_V}$.

Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že j-tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru x_j vůči bázi B_V, resp. sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi B_V tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujme postupně přes všechny bazické vektory.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f\colon U \to U$ tedy počítáme s jednou bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F. Mějme první bazický vektor, tj. $x_1 = (-1,0,3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1,0,3)^T) = (-2,0,6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U. Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravé strany matice.

Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice, tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in \mathcal{S}(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)

Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Sloupcové vektory pravé strany matice, tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení F:

$$F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bází B_U, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ provedeme zobrazením $f(x) = Fx = [f([x]_{B_U})]_{B_U} = (2, 4, -2)^T$.

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bází $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T,\ x_2 = (2, -2, 2)^T,\ x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V? Zobrazení $f\colon U \to V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T,\ x_2 = (2, -2, 2)^T,\ x_3 = (0, 1, -3)^T\},$$
$$B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T,\ y_2 = (0, 1, -1)^T,\ y_3 = (1, 0, 1)^T\}.$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Řešení:

Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ z definice.

Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření obrazů vektorů, kde místo báze B_U vyjadřujeme vektoru vůči bázi B_V, do které zobrazení zobrazuje.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Zobrazme zadaný vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[f]_{B_U}$. Řešení:

$$[f([x]_{B_U})]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U} = Fx = (2, -12, 8)^T.$$

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V, tj. $[x]_{B_V}$.

Řešení:

Počítáme *matici přechodu* ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ od báze B_U vektorového prostoru U k bázi B_V vektorového prostoru V.

Mnemotechnická pomůcka výpočtu: $(B_V|B_U) \overset{RREF}{\sim} (I_n \mid {}_{B_V}[id]_{B_U}))$.

Postup obdobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v kroku, kdy nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Do výpočtu matice lineárního zobrazení dle definice dosadíme takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Výsledná matice ${}_{B_V}[id]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Zobrazme zadaný konkrétní vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[id]_{B_U}$. Řešení:

$$ {}_{B_V}[id]_{B_U}\,[x]_{B_U} = [id([x]_{B_U})]_{B_V} = (1, -6, 4)^T. $$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi soustavou přes lineární kombinaci.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtěte souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U, tj. $[x]_{B_U}$.

Řešení:

V předchozím postupu zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření do báze.

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right). $$

Výsledná matice $F = {}_{B_U}[id]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: ${}_{B_U}[id]_{B_V}\,[x]_{B_V} = (1, 2, -1)^T$.

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtěte matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Řešení:

Využijeme teorie: Buď U a V vektorové prostory a $f\colon U \to V$ isomorfismus, pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Předpokládejme nyní, že víme, že zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ je isomorfismus.

$$ {}_{B_U}[id^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[id]_{B_U})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Čímž jsme spočítali matici přechodu dvěma způsoby: a) výpočtem z definice matice lineárního zobrazení, b) výpočet inverzního zobrazení v případě izomorfního zobrazení.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V.

Řešení:
Způsoby řešení již známe více:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B_V}[f]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[f]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[id]_{B_V}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B_V se zobrazí maticí přechodu ${}_{B_U}[id]_{B_V}$ vůči bázi B_U, následně se transformuje maticí ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ vůči bázi B_V.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Řešení:
Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} B_U &= \{(-1,0,3)^T,\ (2,-2,2)^T,\ (0,1,-3)^T\}, \\ B_V &= \{-x^2+x,\ x-1,\ x^2+1\}. \end{aligned}$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

Řešení:

(a) Protože $\operatorname{rank}(F) = 2$ a pro každé lineární zobrazení $f\colon U \to V$ je $\dim(U) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(f(U))$, tudíž $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - \operatorname{rank}(F) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne, že zobrazení f není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí F není prosté, protože F nemá lineárně nezávislé sloupce.

(b) Víme, že platí $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(F)) = \operatorname{rank}(F)$, kde $\dim(f(U))$ určuje dimenzí obrazu zobrazení f. Z hodnoty dimenze vektorového prostoru $\mathcal{P}^2$, které má dimenzi $\dim(\mathcal{P}^2) = 3$, platí $\dim(f(U)) < \dim(\mathcal{P}^2)$. Proto není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí F není „na“ protože, dle F nemá lineárně nezávislé řádky.

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

(a) $f(x) = f(y) = (-1,-1,1)^T$,

(b) $f(x) = f(y)$.

<u>Řešení</u>:

(a) V řeči lineárních zobrazení hledáme vektor x, který se zobrazí zobrazením f na zadaný vektor $b = f(x)$ V řeči:

i. lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{f}} f(x)$

ii. matic lineárních zobrazení $x \xrightarrow{\text{A}} b$

iii. maticových reprezentací soustav lineárních rovnic $Ax = b$; přičemž, lze-li soustavu lineárních rovnic vyřešit, platí $b \in \mathcal{S}(A)$, tedy b je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A, kde řešení x udává „naškálování“ těchto vektorů.

Sestavíme a vyřešíme soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Z řešení vidíme, že matice má netriviální kernel a tedy nekonečno řešení. Určíme si dvě konkrétní řešení např. $x = (1,-1,0)^T$, $y = (0,-2,-1)^T$. Můžeme provést kontrolu zobrazením vektorů. Tyto vektory jsou souřadnice vektorů vůči bázi B.

(b) V tomto případě nemáme zadaný vektor $f(x) = f(y)$, ke kterému hledáme vzor. Co s tím? Přibyl nám jeden volný parametr. Dílčím řešením úlohy je, jeden vektor $f(x)$ zvolit. Víme ale pak, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$, resp. že má soustava řešení? Zvolme tedy $f(x)$ takové, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$. Zvolíme si náhodný vektor (výběru sloupců matice A – sloupcová interpretace řešení soustav lineárních rovnic), např. $x = (1, -1, 0)^T$ (zvolena byla taková čísla, aby se s nimi dobře počítalo), a vypočteme jeho obraz $f(x) = Ax$. (Což je způsob, jak byl zkonstruován tento příklad.) Přičemž situaci převádíme na předchozí případ.

13. Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 13.1 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:
Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na“, tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$$_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na“. Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0, 0, 1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Cv. 13.2 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:
Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru)

takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o.

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$$_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy

$$u = 1 \cdot (2, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 3, 5)^T - 4 \cdot (7, 1, 4)^T = (-25, 0, -10)^T,$$

který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(-25, 0, -10).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B, my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $u = (-25, 0, -10)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(-25, 0, -10)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je "na"): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva vektory: $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na“ (surjektivní).

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.3 Nechť $f\colon U \to V$, $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.

Řešení:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté: Víme, že:

$$\forall u_1, u_2 \in U \;:\; u_1 \neq u_2 \;\Rightarrow\; f(u_1) \neq f(u_2),$$
$$\forall v_1, v_2 \in V \;:\; v_1 \neq v_2 \;\Rightarrow\; g(v_1) \neq g(v_2).$$

Chceme:

$$\forall u_1, u_2 \in U \;:\; u_1 \neq u_2 \;\Rightarrow\; g(f(u_1)) \neq g(f(u_2)).$$

Vezmeme-li libovolná různá $u_1, u_2 \in U\colon u_1 \neq u_2$, pak $f(u_1) \neq f(u_2)$ jsou různá (f je prostá). Z toho, že g je prostá a $f(u_1), f(u_2) \in U\colon f(u_1) \neq f(u_2)$ máme $g(f(u_1)) \neq g(f(u_2))$.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $f \circ g$ je „na“: Jen nápověda: pro libovolné $w \in W$ napřed najdeme jeho předobraz v g, pak předobraz předobrazu v f.

Cv. 13.4 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$.

Ano, ověřte zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři).

Ano, reálný polynom stupně nejvýš tři můžeme reprezentovat jeho koeficienty (čtyři reálná čísla taková, že $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$). Každá čtveřice čísel nám dá jeden polynom a každý polynom nám dá jednu čtveřici čísel.

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Ano, isomorfismem bude transpozice (to je asi ten nejpřirozenější isomorfismus mezi těmito prostory).

(d) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.

Ano, můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

(e) Prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností.

Ne, intuitivně protože nemáme polynomy nekonečného stupně, ale máme například posloupnost $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(v) = u^Tv$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.5 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) I_2.

Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0$ (nulová matice). Nepatří do obrazu, neboť každá matice v obrazu má nulovou diagonálu (na diagonále se prvky odečtou).

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Patří do jádra, ale nepatří do obrazu.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nepatří do jádra, ale je obrazem (mimo jiných, protože diagonálu můžeme volit libovolně) matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.6 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Řešení:

Napřed si zobrazení f vyjádříme maticí, tedy existuje $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$ (používáme A, protože toto značení je kratší). Tedy $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f(v) = Av$. Navíc ale máme $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f^n(v) = A^n v$.

Pokud $v \in \mathrm{Ker}(f^n)$, pak $f^n(v) = o$, tedy $A^n v = o$. Pak ale jistě

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = Ao = o.$$

Tedy $v \in \mathrm{Ker}(f^n) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(f^{n+1})$, tudíž $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+2c)^T$.

Řešení:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.

Je „na“, ale není prosté.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d,\ a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.

Je „na“ a je prosté.

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$.

Není na (první a poslední souřadnice výsledku jsou vždy stejné), ani prosté $(f(x^2-x-2) = (0,0,0,0)^T)$.

Cv. 13.8 Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

Řešení:

Nechť dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(A)$ a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je jeho báze, doplňme ji na bázi celého $\mathcal{S}(A)$ pomocí vektorů $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$. Pak $\mathrm{rank}(B) = \dim(\mathcal{S}(B)) = k + \ell$. Chceme ukázat, že $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathcal{S}(AB)) = \ell$. Uvědomme si, že obraz AB můžeme zkoumat zkoumáním toho, kam A zobrazí bázi $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell$. Bázi $v_1, \ldots, v_k$ zobrazí na nulový vektor. Pokud by vektory $Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_\ell$ byly lineárně závislé:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A w_1 + \alpha_2 A w_2 + \ldots + \alpha_\ell A w_\ell &= o, && \text{(alfy netriviální)} \\ A\,(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_\ell w_\ell) &= o. \end{aligned}$$

Ale druhý řádek je spor, neboť z volby vektorů $w_1, \ldots, w_\ell$ víme, že žádná netriviální kombinace vektorů w_j není v jádře matice A.

14. Afinní podprostory

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:
Označme jako $X = \{x^* \in \mathbb{R}^n;\ Ax^* = b\}$ množinu řešení soustavy $Ax = b$. Pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ (tedy $x_i : Ax_i = b$) má platit, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X, totiž

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \ldots + \alpha_n Ax_n = \alpha_1 b + \alpha_2 b + \ldots + \alpha_n b.$$

Vytkneme zprava vektor b a ze vztahu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ dostáváme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)b = b.$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,2,3)^T,\ x_1 = (2,3,1)^T,\ x_2 = (1,3,2)^T,\ x_3 = (2,1,3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:
Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1,1,-2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0,1,-1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1,-1,0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1,0,2)^T,\ x_1 = (2,2,1)^T,\ x_2 = (2,1,3)^T,\ x_3 = (3,3,2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:
Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostory span$\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme $x_1 - x_0 = (1,2,-1)^T$, $x_2 - x_0 = (1,1,1)^T$, $x_3 - x_0 = (2,3,0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnosti následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnost matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \operatorname{span}\{(1,2)^T\} + (1,-1)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(2,4)^T\} + (2,3)^T$,

(b) $M = \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\} + (1,0,0)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\} + (2,-1,-1)^T$.

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M, tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1). Jejich rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1,-1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N, tedy jako $(1,-1)^T = \alpha(2,4)^T + (2,3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$
\begin{aligned}
2\alpha + 2 &= 1,\\
4\alpha + 3 &= -1,
\end{aligned}
$$

která nemá řešení. Proto $(1,-1)^T \notin M$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný. Ve skutečnosti přímky M, N jsou rovnoběžné.

(b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T \in P$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do Q, tedy se dá vyjádřit jako $c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1,2,1)^T + b(2,1,0)^T + (1,0,0)^T = c(0,3,2)^T + d(3,0,-1)^T + (2,-1,-1)^T,$$

která se dá zapsat soustavou tří rovnic jako

$$
\begin{aligned}
a + 2b + 1 &= 3d + 2,\\
2a + b &= 3c - 1,\\
a &= 2c - d - 1.
\end{aligned}
$$

Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b, znamená to, že pro libovolný vektor z M daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N. Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d, dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$
\begin{aligned}
a + 2b &= 3d + 1,\\
2a + b &= 3c - 1,\\
a &= 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{3a+3}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} \end{array}\right).$$

Platí, že $\frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{2a+b+1}{3}$ a $d = \frac{a+2b-1}{3}$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Cv. 14.5 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 10$ a g představuje překloplení podle přímky $q : x = 2$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x o $(0, -5)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 5)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -5)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,

- $f_3(x) = x + (0,5)^T$.

Dostáváme $f(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0,-5)^T)) = f_3(O_1(x + (0,-5)^T)) = O_1(x + (0,-5)^T) + (0,5)^T = O_1x + (0,5)^T + (0,5)^T = O_1x + (0,10)^T$.

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3, kde

- $g_1(x) = x + (-2,0)^T$ (posunutí o $(-2,0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2x$ (rotace podél osy y),
- $g_3(x) = x + (2,0)^T$ (posunutí nazpět o $(2,0)^T$).

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4,0)^T$.

(c) Složení $f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4,0)^T) = O_1(O_2x + (4,0)^T) + (0,10)^T = O_1O_2x + O_1(4,0)^T + (0,10)^T = O_1O_2x + (4,0)^T + (0,10)^T = O_1O_2x + (4,10)^T$, po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.6 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \ldots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Důležité je zde uvědomit si, co za dodatečnou informaci nám dává struktura vektorů $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Z jejich struktury vyplývá, že $\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$. Jedná se totiž pouze o rozdělení vektorové rovnice na 2 části, kde v první uvažujeme prvních n složek vektorů y_i a v druhé poslední $(n+1)$. složku. Schematicky,

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_n,$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot 1 = 0.$$

Důkaz tvrzení rozdělíme na 2 implikace.

- „Lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$ implikuje afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$."

  Pokud jsou $y_0, y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, pak platí

  $$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i y_i = 0$$

  a zároveň existuje $j : \alpha_j \neq 0$. Můžeme proto vyjádřit y_j pomocí ostatních vektorů jako

  $$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} y_i.$$

Speciálně (omezíme-li se na prvních n složek) také

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} x_i.$$

a (omezíme-li se na poslední složky y_i)

$$1 = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}.$$

Vidíme, že x_j se dá vyjádřit jako afinní kombinace zbylých vektorů s koeficienty β_i. Vektory $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou tedy afinně závislé.

- „Afinní závislost $x_0, x_1, \ldots, x_n$ implikuje lineární závislost $y_0, y_1, \ldots, y_n$."
Jsou-li $x_0, x_1, \ldots, x_n$ afinně závislé, pak existuje j takové, že

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i \quad \text{a zároveň} \quad \sum_{i \neq j} \beta_i = 1.$$

Sloučením obou rovnic dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i.$$

Množina $y_0, y_1, \ldots, y_n$ je tudíž lineárně závislá.