Domácí úkoly z Diskrétní a spojité optimalizace

(10. května 2024)

Úkol 1. *[deadline 19.4.]*

Uvažujme elipsoid

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x = p + Pu,\ \|u\|_2 \leq 1\},$$

který je dán jako obraz jednotkové koule při lineárním (či přesněji afinním) zobrazení a kde $p \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vyřešte úlohu

$$\max\ c^T x \ \text{ za podmínek }\ x \in \mathcal{E}.$$ **10**

Úkol 2. *[deadline 19.4.]*

Dokažte ekvivalentní charakterizaci konvexního obalu množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{conv}(M) = \{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i;\ x_i \in M,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,\ k \in \mathbb{N}\}.$$ **10**

Úkol 3. *[deadline 26.4.]*

Ukažte, že funkce $\log(\sum_{i=1}^n e^{x_i})$ je konvexní na množině $x \in \mathbb{R}^n$. **10**

Úkol 4. *[deadline 26.4.]*

Trochu kreativní úkol:
Zobecněte větu o součinu konvexních funkcí na funkce $f, g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **10**

Úkol 5. *[deadline 3.5.]*

Pro dané $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ vyřešte úlohu

$$\min\ \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \ \text{ za podmínek }\ a^T x \geq b,\ x \geq 0.$$ **10**

Úkol 6. *[deadline 10.5.]*

Najděte duální kužele k zobecněným Lorentzovým kuželům $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_\infty$ nad součtovou a maximovou normou. Pokud se vám to nepodaří, tak alespoň určete, zda jsou kužele samoduální. **10**

Úkol 7. *[deadline 17.5.]*

S využitím KKT podmínek vyřešte pro dané $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ úlohu

$$\max\ \textstyle\sum_{i=1}^n \log(x_i) \ \text{ za podmínek }\ a^T x \leq b,\ x \geq 0.$$ **10**

Úkol 8. *[deadline 31.5.]*

Penalizační metodou řešte úlohu

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \ \text{ za podmínek }\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 100.$$

Jako počáteční bod zvolte $x = (0,0,0)^T$, jako penalizační funkci druhou mocninu, a nakreslete aproximaci centrální cesty (tj., trakektorie bodů postupných řešení) v podprostoru souřadnic (x_1, x_2). Na vyřešení podúloh (optimalizačních problémů bez omezení) můžete použít vhodný software (Matlab, Octave, Maple, ...) **10**

Úkol 9. *[deadline 31.5.]*

Bariérovou metodou řešte úlohu

$$\min\ x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 14x_1 + 15x_2 - 16x_3 \ \text{ za podmínek }\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 100.$$

Jako počáteční bod zvolte $x = (0, 0, 0)^T$, jako bariérovou funkci logaritmus, a nakreslete aproximaci centrální cesty v podprostoru souřadnic (x_1, x_2). Na vyřešení podúloh (optimalizačních problémů bez omezení) můžete použít vhodný software (Matlab, Octave, Maple, ...) **10**