Příklady z Celočíselného programování

(Milan Hladík, 12. května 2015)

A Formulace

1. Uvažme následující problém: Máme 1 letiště na pevnině a n vrtných plošin na moři, h vrtulníků a každý vrtulník má kapacitu osob c a rychlost v. Dále známe vzdálenosti d_{ij} mezi i-tou a j-tou plošinou a vzdálenosti d_{0j} mezi letištěm j-tou plošinou. Koncem každého měsíce musíme obměnit osoby pracující na plošinách; na i-té plošině je jich p_i.

   Navrhněte řešení tohoto problému, tj. navrhněte formulaci, diskutujte její vlastnosti, popř. navrhněte vylepšení (a jaké údaje byste k vylepšení potřebovali). **8**

2. Buďte b_1, b_2, b_3 binární proměnné. Linearizujte podmínku $b_1 b_2 = b_3$. **4**

3. Najděte nějakou zajímavou úlohu celočíselného programování „ze života“. **4**

B Teorie

1. Dokažte, že konvexní obal množiny přípustných řešení smíšené úlohy celočíselného programování

$$\operatorname{conv}\{x \in \mathbb{R}^m,\, y \in \mathbb{Z}^n \mid Ax + By \le c\}$$

   je konvexním polyedrem. (Na přednášce se dokazovalo pro čistou úlohu.) **10**

2. Nechť $(\cdot)_I$ značí celočíselný polyedr, tj. konvexní obal celočíselných bodů. Rozhodněte zda pro konvexní polyedry P, Q platí $(P+Q)_I = P_I + Q_I$, popř. aspoň nějaká inkluze. **4**

3. Nechť $\sigma(\cdot)$ značí velikost zápisu. Ukažte, že

   (a) $\sigma(a+b) \le \sigma(a) + \sigma(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. **2**

   (b) $\sigma(a+b) \le \sigma(a) + \sigma(b)$, obecně neplatí $\forall a, b \in \mathbb{Q}$. **2**

   (c) $\sigma(ab) \le \sigma(a) + \sigma(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$. **2**

C Metody

1. V 1. Gomoryho algoritmu po zavedení sečné nadroviny a provedení transformace tabulky podle nového řádku pak tento řádek vynecháme. Může se stát, že se někdy později dostaneme zase na druhou stranu této sečné nadroviny? Obecně, jak ovlivní vynechání řádku průběh algoritmu? **6**

2. Vyřešte úlohu ze cvičení pomocí 1. nebo 2. Gomoryho algoritmu a *primární* simplexové metody:

$$\max x_1 - x_2; \quad -\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 \le \tfrac{1}{3},\ x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 \le \tfrac{1}{3},\ x \ge 0,\ x \in \mathbb{Z}^2. \quad \textbf{4}$$

3. Dokažte konečnost 2. Gomoryho algoritmu (za vhodných předpokladů). Stačí analogii Lemmatu 3 z 1. Gomoryho algoritmu. **6**

4. Dokažte, že sečnou nadrovinu čisté úlohy celočíselného programu lze definovat např. také následujícím způsobem: Buď $d_{k0} \notin \mathbb{Z}$, tj. výsledná l-tabulka nemá napravo celé číslo v k-tém řádku. Sečná nadrovina je pak tvaru $\sum_{j \in I} x_{N_J} = 1$, kde $I = \{j = 1, \ldots, n \mid d_{kj} \notin \mathbb{Z}\}$ (množina indexů prvků v k-tém řádku, které nejsou celočíselné). **4**

5. Ovlivní nějak průběh 1. resp. 2. Gomoryho algoritmu to, že soustavu nerovnic předem přenásobím nějakým kladným (a např. celým) číslem? **4**

6. Buď $f > 0$ dáno. Najděte minimální popis konvexního obalu množiny

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R};\ x - y \leq f,\ y \geq 0\}$$

pomocí soustavy lineárních nerovnic. **2**

7. Dokažte, že při použití metody Branch & bound na smíšenou úlohu s jedinou celočíselnou proměnnou navštívíme při procházení větvícího stromu nejvýše 3 uzly. **4**

D Problém batohu a set covering

1. Uvažujme varianty problému batohu

$$\max c^T x;\ a^T x \leq b,\ x \in \{0,1\}^n, \qquad (P_1)$$
$$\max c^T x;\ a^T x \leq b,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^n, \qquad (P_2)$$
$$\max c^T x;\ A^T x \leq b,\ x \in \{0,1\}^n, \qquad (P_3)$$
$$\max c^T x;\ a^T x = b,\ x \in \{0,1\}^n, \qquad (P_4)$$

kde $c, A, a, b \geq 0$.

   (a) Ukažte, že předpoklad $a, b, c > 0$ není v (P_2) na újmu obecnosti. Jak je to u (P_3) a (P_4)? **4**

   (b) Rozhodněte, která z variant (P_1)–(P_4) je převoditelná na nějakou jinou, popř. které jsou na sebe navzájem převoditelné. **4**

   (c) Pro (P_3) navrhněte heuristiku a horní odhad její relativní chyby. **4**

   (d) Prostudujte metodu Branch & Bound pro problémy (P_3) a (P_4). **4**

   (e) Prostudujte preprocessing pro problémy (P_2)–(P_4). **4**

2. Najděte příklad, kdy se nabyde (co nejtěsněji) mez z věty o aproximačním faktoru hladového řešení úlohy Set covering. **4**

E Problém obchodního cestujícího (TSP)

1. Dokažte, že dimenze celočíselného polyedru M_I (což je konvexní obal celočíselných přípustných bodů) je rovna $\frac{1}{2}n(n-3)$, a to tak, že najdete $\frac{1}{2}n(n-3)+1$ afinně nezávislých přípustných řešení. **6**

2. Pro symetrické TSP s $n \geq 3$ dokažte, že nerovnice

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq |U| - 1, \quad U \subset \{1, \ldots, n\},\ 3 \leq |U| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

je facet-defining, a to tak, že najdete $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ afinně nezávislých přípustných řešení. **6**

3. Pro úlohu s $n = 4$ najděte všechny facet-defining nerovnosti. **6**

F Souhrn

1. Odpovězte na otázky: **10**

   (a) Jaké téma (resp. témata) z přednášky se mi nejvíce líbilo a proč?

   (b) Jaké téma (resp. témata) z přednášky se mi nejméně líbilo a proč?

   (c) Co bych změnil(a) na stylu přednášení?
   (používat slajdy namísto tabule, více příkladů, více teorie, ...)

   (d) Jaký by byl optimální styl průběhu cvičení?
   (počítání u tabule, počítání doma, programování algoritmů na počítači, testování již existujicích řešičů, vynechat cvičení úplně, ...)

   (e) Uměl(a) bych po absolvování kurzu bez problémů řešit příslušné praktické optimalizační úlohy a být (teoreticky) schopen(schopna) vylepšovat stávající algoritmy?

   (f) Co jsem od přednášky očekával(a)? A bylo to splněno?