Příklad 1 (Počty funkcí).
Kolik existuje funkcí z $\{1, 2, \ldots, a\}$ do $\{1, 2, \ldots, b\}$?

a) všech

Představíme si, že funkci postupně vytváříme od prvku 1 až do prvku a. Pro každý prvek máme celkem b možností, kam ho zobrazit a toto provádíme a-krát. Tedy možností je celkem $\overbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}^{a\text{-krát}} = b^a$

b) prostých

Podobná situace, jako výše. Zobrazujeme-li však prvek 2, tak už ho nemůžeme zobrazit na tentýž prvek, na který se zobrazil prvek 1. Máme tedy už jen $(b-1)$ možností, kam ho zobrazit. Obecně máme $(b-i+1)$ možností, kam zobrazit i-tý prvek. Celkem $\overbrace{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)}^{a\text{-krát}} = \frac{b!}{(b-a)!} = b^{\underline{a}}$ možností. Důležitá je podmínka $a \leq b$, jelikož jinak neexistuje žádná prostá funkce z a do b.

c) bijekcí

Téměř stejná situace, jako u prostých funkcí. Nyní dokonce musí $a = b$, jinak by bijekce nemohla existovat. Dále využijeme toho, že pokud máme prostou funkci mezi stejně mohutnými množinami, tak už se musí nutně jednat o bijekci. Stačí tedy použít vzorec výše pro prosté funkce a dosadit $a = b$ čímž získáme počet možností $a! = b!$.

Příklad 2 (Staří známí).
Kolika způsoby lze z n rozlišitelných kuliček vybrat uspořádanou k-tici? A kolika neuspořádanou? Co když jsou kuličky nerozlišitelné?

Znovu postupujeme vytvářením uspořádané trojice. Budeme postupovat po jednotlivých pozicích. Na první pozici můžeme umístit n kuliček, na druhou $n-1$ kuliček a tak dále. Máme tedy $\frac{n!}{(n-k)!}$ možností. Všimněme si nyní, že vlastně počítáme všechna možná **prostá** zobrazení jednotlivých pozic $\{1, \ldots, k\}$ na kuličky $\{1, \ldots, n\}$. Jde o zobrazení, nikoliv o jen tak ledajakou relaci, jelikož každé pozici musíme přiřadit vždy právě jednu kuličku. Prosté musí být z toho důvodu, že dvěma pozicím nemůžeme přiřadit stejnou kuličku. (Kulička se nachází vždy na nejvýše jedné pozici, nikoliv v superpozici.)

Pokud vybíráme neuspořádanou k-tici, tak vlastně vybíráme nějakou podmnožinu. Podmnožině totiž také nezáleží na pořadí, což je pro nás nyní chtěná vlastnost. Hledané číslo tedy přímo odpovídá číslu $\binom{n}{k}$. Také si můžeme představit, že spočítáme nejprve všechny uspořádané k-tice a následně si všimneme, že každá neuspořádaná k-tice má přesně $k!$ způsobů, jak ji můžeme uspořádat. Číslo $\frac{n!}{(n-k)!}$ tedy každou z našich neuspořádaných k-tic započetlo právě $k!$ krát. Abychom tedy získali počet všech neuspořádaných k-tic, tak číslo $\frac{n!}{(n-k)!}$ podělíme číslem $k!$ a máme vyhráno..

Pokud jsou kuličky nerozlišitelné, tak máme vždy jen jeden jediný způsob, jak si vybrat k-tici. Kdybychom vybrali jiných k kuliček, tak stejně nepoznáme rozdíl.

Příklad 3 (Uvažujeme kombinatoricky).
Dokažte kombinatorickou úvahou:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Ukážeme, že levá strana rovnice počítá objekty, které jednoznačně odpovídají objektům, které počítá číslo na pravé straně. Mějme tedy množinu $N = \{1, \ldots, n\}$ z níž vybíráme k prvkové podmnožiny. Když levá strana rovnice započítá množinu $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$, tak to přesně odpovídá případu, kdy pravá strana rovnice započítá množinu $N \setminus A$. Všimněme si, že všechny množiny typu $N \setminus A$ obsahují právě $n-k$ prvků. Mohli bychom si tedy představit, že namísto počítání všech k prvkových podmnožin počítáme všechny jejich možné doplňky. Ty mají tedy vždy $n-k$ prvků a bude jich přesně $\binom{n}{n-k}$.

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Levá strana počítá rovnou všechny k prvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny. Řekněme, že tato množina je $N = \{1, \ldots, n\}$. Co počítá strana pravá? Zafixujme si nějaký prvek $x \in N$. Nejprve spočítáme všechny k prvkové podmnožiny, které prvek x obsahují. Těch je přesně $\binom{n-1}{k-1}$ jelikož odpovídají všem způsobům, jak k prvku x dovybrat zbylých $k-1$ prvků ze zbylých $n-1$ prvků. Nyní pojďme spočítat všechny k prvkové podmnožiny, které neobsahují prvek x. Jelikož nechceme vybrat x, tak máme už jen $n-1$ možností a musíme vybrat k prvků. Výsledný počet tedy odpovídá číslu $\binom{n-1}{k}$.

c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Suma na levé straně počítá postupně všechny 0-prvkové podmnožiny, 1-prvkové, 2-prvkové a tak dále až do n. Ve finále tedy spočítá počet všech možných podmnožin nějaké n-prvkové množiny. A tomuto počtu přesně odpovídá číslo 2^n.

d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Co počítá suma na levé straně nyní? Je podezřele podobná té sumě výše, avšak obsahuje člen $(-1)^k$, který způsobí, že množiny liché velikosti započteme se záporným znaménkem. Můžeme si představit, že tedy sečteme všechny podmnožiny sudé velikosti a poté odečteme všechny podmnožiny liché velikosti. Už jsme si na předchozích cvičeních ukázali, že sudých podmnožin je stejně jako těch lichých a proto tedy nutně vyjde číslo 0. Pozor, že rovnost neplatí pro obecné n ale pouze pro $n \geq 1$.

Příklad 4 (Rozlož a spočítej).
Kolik existuje různých ekvivalencí na čtyřech prvcích?

Využijeme toho, že každá ekvivalence odpovídá nějakému rozkladu podkladové množiny na třídy ekvivalence. Postupujeme systematicky podle velikosti největší třídy ekvivalence v rozkladu.

Máme-li největší třídu velikosti 1, tak musí mít všechny třídy velikost 1 a existuje pouze jeden takový způsob.

Má-li největší třída ekvivalence velikost 2, tak je situace zajímavější. Máme $\binom{4}{2}$ způsobů, jak vybrat, která dvojice je v této největší třídě. Nyní mohou nastat dva případy pro každý takový výběr. V jednodušším případě jsou nevybrané prvky každý ve vlastní třídě, tedy máme dalších $\binom{4}{2} = 6$ rozkladů. V tom složitějším, jsou zbylé prvky oba v jedné třídě také velikosti 2, v takovém případě se stane, že i oni započítají jednou nás z jejich pohledu. Takových rozkladů je tedy $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$.

Pokud má největší třída velikost 3, tak ji můžeme zvolit $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ způsoby.

Zbývá už jen jediný případ, kde jsou všechny prvky v jedné ekvivalenční třídě.

Celkem máme tedy $1 + 6 + 3 + 4 + 1 = 15$ ekvivalencí.

Příklad 5 (Kuličky a přihrádky).
Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných přihrádek? Co když žádná přihrádka nesmí být prázdná?

Abychom vyřešili tento problém, tak se hodí vhodně si zakódovat konfiguraci kuliček a přihrádek do řetězce nul a jedniček. Máme-li například 4 přihrádky a 5 kuliček, tak konfiguraci $((\circ, \circ), (), (\circ), (\circ, \circ))$ zakódujeme na řetězec 00110100. Jak toto kódování funguje? Představíme si, že symboly 0 odpovídají kuličkám a symboly 1 tvoří předěly mezi jednotlivými přihrádkami. Všimněme si, že toto kódování je vzájemně jednoznačné. Pokud mi někdo poskytne kódování 10100010, tak přesně dokáži rekonstruovat konfiguraci $(), (\circ), (\circ, \circ, \circ), (\circ)$. Tím jsme si problém zjednodušili, jelikož nyní stačí spočítat, kolika způsoby můžeme vytvořit řetězec s právě n nulami a právě $k-1$ jedničkami.

Kolik takových řetězců existuje můžeme spočítat následující úvahou. Všimneme si, že všechny řetězce mají délku $n+k-1$. Jednotlivé pozice v řetězci s označíme čísly $\{1, 2, \ldots, n+k-1\}$. Nyní každý řetězec obsahující přesně n nul můžeme reprezentovat výčtem pozic, na kterých se nuly nacházejí. Například řetězec 10100010 bychom reprezentovali jako $\{2, 4, 5, 6, 8\}$. Chceme-li spočítat, kolik existuje řetězců, tak místo toho můžeme ekvivalentně spočítat, kolik existuje n prvkových podmnožin $n+k-1$ prvkové množiny. Výsledkem je tedy číslo $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Pokud žádná přihrádka nesmí být prázdná, tak nejprve vložíme po jedné kuličce do každé z k přihrádek.

Následně počítáme počet způsobů, jak rozmístit $n-k$ kuliček do k přihrádek a to už umíme spočítat.

Příklad 6 (Sestavme si vládu).
Kombinatorickou úvahou vyjádřete výraz $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ bez použití sumy.

Tuto sumu je lehké spočítat, jakmile využijeme vztahu $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Proč tento vztah platí? Levou část rovnice si můžeme představit, následovně: Počítáme všechny způsoby, jak si nejprve z n-prvkové množiny vybrat k-prvkovou podmnožinu a následně z ní ještě vybrat jeden významný prvek (máme k možností, jak to provést). Stejné číslo však můžeme spočítat i tím způsobem, že nejprve zvolíme význačný prvek z celé množiny (máme celkem n možností, jak ho vybrat) a teprve pak dovybereme zbylé prvky do té k-prvkové podmnožiny, kterou chceme vyrobit. Tohoto „dovyrobení“ můžeme docílit celkem $\binom{n-1}{k-1}$ způsoby, jelikož nechceme znovu vybrat ten význačný prvek.

Vyzbrojeni vztahem výše získáme $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$.