Definice. Říkáme, že číslo n dělí číslo m beze zbytku a píšeme $n \mid m$, když existuje celé číslo k takové, že $n \cdot k = m$.

1 Důkazy

Příklad 1 (Suma mocnin dvojky).
Dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Nejprve ukážeme, že výrok platí pro $n = 0$. Máme tedy na levé straně rovnosti $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$. Na pravé straně $2^{(0+1)} - 1 = 2 - 1 = 1$ a obě strany se tedy rovnají.

V indukčním kroku budeme předpokládat, že výrok platí pro nějaké m. Tedy že pro m platí rovnost $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$. Nyní chceme ukázat, že výrok platí i pro následující člen, tedy pro $m+1$. Konkrétně chceme ukázat, že $\sum_{i=0}^{m+1} 2^i = 2^{m+2} - 1$. Jak toho docílíme?

Koukneme se, jak vypadá levá strana rovnice výše. Rozepsáním sumy na levé straně získáme výraz

$$\sum_{i=0}^{m+1} 2^i = \overbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^m}^{\sum_{i=0}^{m} 2^i} + 2^{m+1}$$

a díky předpokladu víme, že platí rovnost $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$ a tedy máme $\overbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^m}^{2^{m+1}-1} + 2^{m+1} = 2^{m+1} + 2^{m+1} - 1 = 2 \cdot 2^{m+1} - 1 = 2^{m+2} - 1$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2 (Dělitelnost).
Indukcí dokažte, že pro každé $n \geq 0$ platí $4 \mid (6n^2 + 2n)$.

Nejprve si uvědomíme, že $4 \mid (6n^2 + 2n)$ je ekvivalentný výroku $\exists k \in \mathbb{Z} : 4k = 6n^2 + 2n$.

Pro $n = 0$ máme $4 \mid (6 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0)$ tedy $4 \mid 0$ což platí, jelikož za hledané k můžeme zvolit 0 a platí, že $4 \cdot 0 = 0$. (Z toho je vidět i obecnější pozorování, že nulu dělí cokoliv.)

Nyní přichází na řadu indukční krok. Indukčním předpokladem pro nás bude, že pro nějaké m platí, že: $4 \mid (6m^2 + 2m)$. Tedy víme, že existuje l takové, že $4l = 6m^2 + 2m$.

Naším cílem bude ukázat, že $4 \mid (6(m+1)^2 + 2(m+1))$. Jinými slovy hledáme d takové, že $(6(m+1)^2 + 2(m+1)) = 4d$. Rozepíšeme si tedy levou stranu rovnice na tvar $6m^2 + 12m + 6 + 2m + 2 = 6m^2 + 2m + 12m + 8$.

Díky předpokladu máme $\overbrace{6m^2 + 2m}^{4l} + 12m + 8 = 4l + 4(3m) + 4 \cdot 2 = 4(l + 3m + 2)$. Našli jsme tedy $d = l + 3m + 2$ takové, že $4d = (6(m+1)^2 + 2(m+1))$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (Šachovnice).
Mějme šachovnici o rozměru $2^n \times 2^n$, ve které chybí jedno libovolné políčko. Dokažte, že ji lze zcela pokrýt kostičkami tvaru písmene **L** (zabírající tři políčka).

Rukou psaný důkaz na poslední stránce dokumentu.

Příklad 4 (Sudé × liché).
Dokažte, že pro každou neprázdnou n-prvkovou množinu platí, že počet všech jejích podmnožin sudé velikosti se rovná počtu všech jejích podmnožin liché velikosti.

Pro přehlednost si označme l_n počet lichých podmnožin libovolné n-prvkové množiny. Podobně označme s_n počet sudých podmnožin. (Píši zkrácené „lichá podmnožina" a myslím tím „podmnožina s lichým počtem prvků".)

Dobré je si uvědomit, že pro libovolné dvě n-prvkové množiny bude l_n stejné číslo. Tedy nezáleží, jestli množina obsahuje n čísel nebo n jablíček. Záleží čistě na počtu prvků. Stejný argument platí i pro s_n.

Jelikož uvažujeme pouze neprázdné množiny, tak nutně $n \geq 1$. V základním kroku tedy máme jednoprvkovou množinu $\{x\}$ a jediné její podmnožiny jsou $\{x\}$ a $\{\} = \emptyset$. Tedy $l_1 = 1 = s_1$.

V indukčním kroku budeme předpokládat, že pro nějaké m platí, že libovolná m-prvková množina splňuje, že $l_m = s_m$. Chceme ukázat, že za tohoto předpokladu bude platit také $l_{m+1} = s_{m+1}$.

Uvažme tedy libovolnou $(m+1)$-prvkovou množinu $M = \{x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ (tedy pro $i \neq j$ máme $x_i \neq x_j$).

Rozdělíme si podmnožiny na dvě skupiny dle toho, zda do nich náleží x_{m+1}, či nikoliv. Nejprve spočtěme, kolik má $(m+1)$-prvková množina lichých podmnožin neobsahujících prvek x_{m+1}. Tento počet odpovídá číslu l_m, jelikož všechny liché podmnožiny množiny $\{x_1, \dots, x_m\}$ jistě neobsahují prvek x_{m+1} a zároveň jsou i podmnožinami množiny M.

Nyní však musíme ještě započítat všechny liché podmnožiny, které prvek x_{m+1} naopak obsahují. Takové množiny lze získat jako sudé podmnožiny $\{x_0, \dots, x_m\}$, ke kterým přidáme prvek x_{m+1}, čímž vznikne lichá podmnožina množiny M. Tento počet tedy odpovídá s_m.

Jelikož všechny liché podmnožiny množiny M buď obsahují prvek x_{m+1}, nebo ho neobsahují (žádná jiná možnost už není), tak jsme jistě započítali všechny liché podmnožiny množiny M a jejich počet je $l_m + s_m$. Můžeme tedy slavnostně prohlásit, že $l_{m+1} = l_m + s_m$.

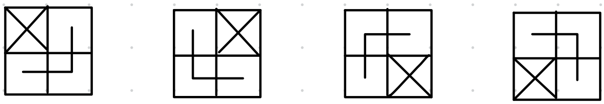
Cvičení: Ukažte, že podobným argumentem lze odvodit, že $s_{m+1} = s_m + l_m$. Z toho pak plyne $s_{m+1} = l_{m+1}$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 5 (Teleskopický součin).
Dokažte, že platí $\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n + 1$ pro každé $n \geq 1$.

Stejný princip jako příklad 1, akorát místo sumy máme produkt. Tedy máme $\prod_{i=1}^{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}$.

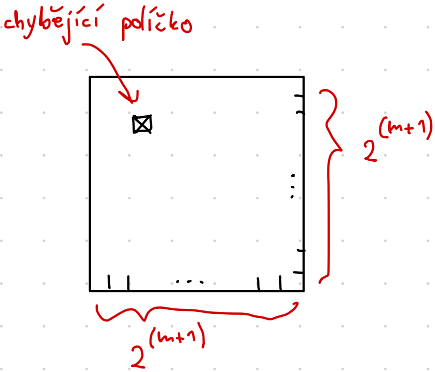
Příklad 3 (Šachovnice).
Mějme šachovnici o rozměru $2^n \times 2^n$, ve které chybí jedno libovolné políčko. Dokažte, že ji lze zcela pokrýt kostičkami tvaru písmene **L** (zabírající tři políčka).

Pro $n = 1$ máme šachovnici 2×2, která lze pokrýt ať už je chybějící políčko kdekoliv:

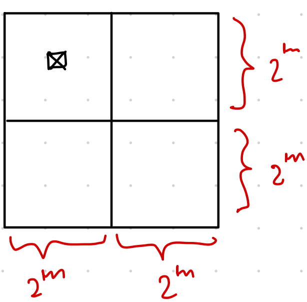


V indukčním kroku budeme předpokládat, že pro nějaké $m \geq 1$ dokážeme útvary pokrýt šachovnici $2^m \times 2^m$, ve které libovolné políčko chybí.

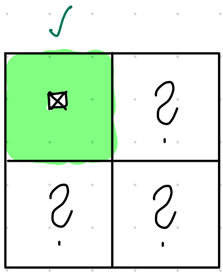
Nyní chceme ukázat, že umíme pokrýt šachovnici $2^{(m+1)} \times 2^{(m+1)}$, ve které může být díra kdekoliv. Například může taková šachovnice vypadat takto:



Všimneme si, že šachovnice lze rozložit na čtyři menší o rozměrech $2^m \times 2^m$

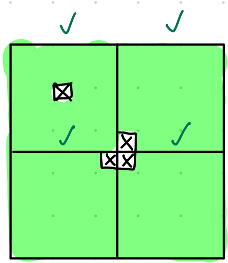


Z indukčního předpokladu víme, že šachovnici $2^m \times 2^m$ s libovolnou dírou umíme pokrýt. Tedy umíme pokrýt levý horní čtverec.



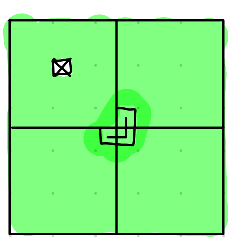
Jak ale pokryjeme ty zbylé čtverce? My totiž umíme z předpokladu pokrýt jen šachovnice <u>s dírami</u>.

Tak si tam ty díry uděláme!*



* Důležité je si uvědomit, že si opravdu můžeme sami zvolit, kde tyto díry budou. Předpoklad nám totiž zaručuje pokrytí $2^m \times 2^m$ pro libovolnou pozici díry.

Z předpokladu celý zelený prostor dokážeme pokrýt. Jelikož jsme si díry zvolili chytře, tak do toho vzniklého prostředního úseku přesně zapadá útvar .



Takto jsme tedy pokryli šachovnici $2^{m+1} \times 2^{m+1}$, což jsme chtěli ukázat.

* Také si uvědomme, že stejný postup by fungoval i kdyby první díra byla jinde.