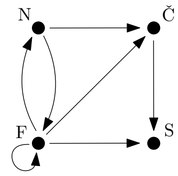
1 Výroky



V následujících příkladech uvažujeme množinu států:

$$M = \{\text{Francie}, \text{Německo}, \text{Česko}, \text{Slovensko}\}$$

a nechť $V(x, y)$ je zkratka pro výrok: „Stát x vyváží víno do státu y.“. Vztah V je znázorněn na diagramu vpravo.

Příklad 1 (Překládání).
Vyjádřete výroky v přirozeném jazyce matematickými symboly a naopak:

(a) Slovensko vyváží víno do Francie. $V(\text{Slovensko}, \text{Francie})$

(b) $\exists y \in M : V(\text{Německo}, y)$ Existuje stát, do kterého Německo vyváží.

Příklad 2 (Pořadí kvantifikátorů).
Vyjádřete následující výroky slovy a následně určete, zda jsou pravdivé či lživé:

(a) $\forall x \in M\ \exists y \in M : V(x, y)$ Všechny státy někam vyváží. Musí z každé tečky jít šipka ven. To neplatí kvůli Slovensku.

(b) $\forall x \in M\ \exists y \in M : V(y, x)$ Do každého státu někdo dováží. Musí vést šipka do každé tečky. To platí.

(c) $\exists x \in M\ \forall y \in M : V(x, y)$ Existuje stát, který vyváží do všech států. Musí existovat jedna tečka ze které jdou šipky do všech teček. Pozor, že musí jít šipka i do té tečky samotné. To platí díky Francii.

(d) $\exists x \in M\ \forall y \in M : V(y, x)$ Existuje stát, do kterého všechny státy vyváží. Musí existovat jedna tečka do které jdou šipky ze všech teček. To neplatí. Pozor, že i kdyby Německo vyváželo do Slovenska, tak Slovensko výrok stále nesplňuje, jelikož nevyváží samo do sebe.

Příklad 3 (Důkazy).
O jisté množině států E jsme zjistili, že splňujě:

1. $\forall x \in E\ \forall y \in E : V(x, y) \Rightarrow \neg V(y, x)$
2. $\forall x \in E\ \forall y \in E\ \forall z \in E : V(x, y) \land V(y, z) \Rightarrow V(x, z)$

(a) Zkuste formulovat podmínky vlastními slovy. Splňuje tyto podmínky i množina M zmíněná výše?

První podmínka říká, že když jeden stát vyváží do druhého, tak ten druhý nesmí vyvážet zpět.

Druhá podmínka znamená, že pro každou trojici států x, y, z platí, že když ten první vyváží do druhého a zároveň ten druhý vyváží do třetího, tak už nutně vyváží ten první do třetího.

Na šipkách to znamená, že když mezi třemi tečkami nastane situace, kdy se dá z první tečky dostat po dvou šipkách s mezikrokem ve druhé tečce do té třetí, tak nutně musí existovat i šipka rovnou z první tečky do té třetí. Doporučuji nakreslit si obrázek

(b) Dokažte, že v E neexistuje stát, který vyváží víno sám sobě. Dokážeme sporem. Kdyby existoval stát s, který vyváží do sebe, tak platí $V(s, s)$. Podmínka jedna však říká, o všech x, y že pokud platí $V(x, y)$, tak nutně neplatí $V(y, x)$. Pokud tedy zvolíme $x = s, y = s$, tak dostaneme spor.

2 Množiny

Definice. Symetrický rozdíl $A \triangle B$ definujeme jako množinu prvků, které jsou buď v A, anebo v B (ale ne v A i B zároveň).

Příklad 4 (Symetrický rozdíl pomocí ostatních operací).
Zapište množinu $A \triangle B$ pomocí množinových operací $\cup, \cap, \setminus$. Nemusíte využít všechny uvedené operace. Zkuste najít aspoň dva způsoby.

Jeden způsob je: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
Druhý způsob je: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Příklad 5 (Dvouprvkové podmnožiny).
Mějme libovolnou množinu K. Uvažme všechny její podmnožiny obsahující právě dva prvky. Jaké množiny jsme z nich schopni vytvořit pomocí operace $\triangle$? Jsme takto schopni zkonstruovat libovolnou podmnožinu množiny K?

Nejprve je dobré, představit si nějakou konkrétní množinu. Třeba $K_1 = \{1, 2, 3\}$. Poté zkusit postupně vytvářet množiny různé velikosti.

Jaké jsou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny K_1? To jsou množiny $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$, které si pojmenujme A, B, C

Dokáži z množin A, B, C pomocí operace $\triangle$ sestrojit prázdnou množinu? Dokáží sestrojit nějakou jednoprvkovou množinu? Tříprvkovou?

Kdyby K měla více než 3 prvky, tak čtyřprvková množina jde vyrobit lehce. No a vlastně i šesti-, osmi- atd. prvkové. Vlastně dokáži vytvořit každou podmnožinu sudé velikosti.

Jaké množiny nám tedy nejdou vytvořit? Ty liché! Jak ale dokázat, že to tak opravdu je?

Je užitečné si seřadit a očíslovat prvky množiny K do vektoru $(x_1, \dots x_n)$. Každou podmnožinu $A \subseteq K$, pak můžeme vyjádřit jako vektor nul a jedniček kde na i-té pozici se nachází 1 právě tehdy když $x_i \in K$.

Například pro K_1 by množina $\{1, 3\}$ odpovídala vektoru $(1, 0, 1)$ nebo zkráceně 101.

Co dělá operace $\triangle$ v jazyku těchto vektorů jedniček a nul?

Co ta operace $A \triangle B$ dělá je, že provede operaci XOR na odpovídajících si pozicích ve vektorech množin A a B. S tím že tabulka pro XOR je:

a	b	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Co nás zajímá je, jaký počet jedniček bude obsažen ve výsledném vektoru množiny $A \triangle B$? Důležité je, že o vektorech množin A a B víme, že obsahují sudý počet jedniček.

Počítejme výsledné jedničky následovně: Nejprve spočítáme kolik jich může být potenciálně, kdyby se žádné nevykrátily. Sečtu počet jedniček ve vektorech množin A a B a označím toto číslo k. Číslo k je nutně sudé číslo, jelikož vzniklo jako součet dvou sudých čísel. To jsme se ale přepočítali a musíme z výsledné sumy k odečíst ty vykrácené jedničky. Ty se však pro každý index zkrátí vždy obě dvě (tedy jeden pár pro každý index, na kterém se jak v A, tak i v B nacházela jednička). Tím pádem celkem odečteme sudé číslo od k a tím získáme nutně zase sudé číslo.

Příklad 6 (Operace na množinách).
Určete maximální počet různých množin, které můžeme získat z množin A, B aplikováním operací $\cup, \cap, \setminus$. Operace můžete opakovat i kombinovat. Stejně tak můžete libovolnou z množin použít vícekrát.

Zde je užitečné, nejprve si nakreslit Vennův diagram množin A a B.

Na diagramu uvidíme tři různé segmenty, ze kterých je možné výsledné množiny skládat — prvky pouze z A, prvky pouze z B a prvky patřící zároveň do A i do B.

Žádný jiný segment už použitím vyjmenovaných operací získat nemůžeme.

Libovolná množina vytvořená operacemi výše je pak kombinací některých ze tří segmentů z diagramu. Jelikož každý segment buď můžeme využít nebo nevyužít, tak máme pro každý segment 2 možnosti a tedy celkem $2^3 = 8$, možností.