8. cvičení z diskrétní matematiky 24.11.2025

Definice. Pro náhodnou veličinu X definujeme její rozptyl jako $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$.

Věta (Markovova nerovnost).
Nechť X je nezáporná náhodná veličina a $t > 0$. Potom platí: $\Pr(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

Příklad 1 (Hazard se ne/vyplácí).
Podivná existence v kápi vám nabídla následující hazardní hru se dvěma férovými šestistěnnými kostkami: Nejprve si zvolíte přirozené číslo n. Následně zaplatíte jeden zlatý a hodíte kostkami. Padne-li na kostkách součet hodnot n, tak vyhráváte n zlatých. V opačném případě nedostanete nic.

a) Popište pravděpodobnostní prostor, ve kterém se hra odehrává?

b) Navrhněte náhodnou veličinu, která bude odpovídat vašemu získanému finančnímu obnosu, pokud za n zvolíte 7. Jaká je její střední hodnota?

c) Najděte všechny možné hodnoty n, pro které se vám tato hra vyplatí.

Příklad 2 (Vánoční večírek).
Na vánoční večírek přišlo n lidí a každý přinesl jeden dárek. Dárky náhodně rozdělíme mezi účastníky. Jaká je střední hodnota počtu lidí, kteří dostanou svůj vlastní dárek?

Příklad 3 (Mince opět na scéně).
Úvahou určete, kolikrát je potřeba hodit férovou mincí tak, aby:

a) Střední hodnota počtu orlů byla 5

b) Pravděpodobnost, že padne alespoň 5 orlů byla přesně $\frac{1}{2}$

Příklad 4 (Užitečný vzoreček).
Dokažte, že platí rovnost $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Příklad 5 (Základní rozdělení).
Pro n.v. X z následujících pravděpodobnostních rozdělení spočítejte pravděpodobnosti jednotlivých hodnot, její střední hodnotu a rozptyl:

a) *Bernoulliho*: X je 1 s pravděpodobností p, jinak 0

b) *Binomické*: X je součet n náhodných nezávislých veličin s Bernoulliho rozdělením

c) *Geometrické*: X je počet Bernoulliho pokusů, dokud nedostaneme 1

Příklad 6 (Zaječí úmysly).
Na palouku panáčkuje n zajíců. Najednou se připlíží n myslivců, každý z nich zamíří na jednoho náhodně vybraného zajíce a zastřelí ho.

a) Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jeden zajíc přežije?

b) Jaká je střední hodnota přeživších zajíců?

Příklad 7 (Promiňte, už se nevejdete).
Dopravní podnik na jedné autobusové lince spustil počítání cestujících. Spočítal, že při výjezdu z vybrané zastávky se v autobuse vyskytuje průměrně 8 cestujících. Autobus má kapacitu 40 lidí. Co můžeme říci o pravděpodobnosti, že po obsloužení této zastávky bude autobus plný (nebo dokonce přeplněný)?

Příklad 8 (Nezávislost doplňků).
Dokažte, že pokud jsou jevy A a B nezávislé, tak jsou i jevy A a $\overline{B} = \Omega \setminus B$ nezávislé.

Příklad 9 (Boj o nezávislost).
Najděte na pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), kde $\Omega := \{0,1\}^3$ a $\forall \omega \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{2^3}$ jevy A, B, C pro které platí $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, ale neplatí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
