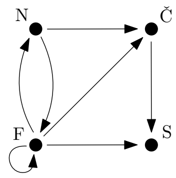
1 Výroky

V následujících příkladech uvažujeme množinu států:



$$M = \{\text{Francie}, \text{Německo}, \text{Česko}, \text{Slovensko}\}$$

a nechť $V(x, y)$ je zkratka pro výrok: „Stát x vyváží víno do státu y.“.
Vztah V je znázorněn na diagramu vpravo.

Příklad 1 (Překládání).
Vyjádřete výroky v přirozeném jazyce matematickými symboly a naopak:

(a) Slovensko vyváží víno do Francie.

(b) $\exists y \in M : V(\text{Německo}, y)$

Příklad 2 (Pořadí kvantifikátorů).
Vyjádřete následující výroky slovy a následně určete, zda jsou pravdivé či lživé:

(a) $\forall x \in M\ \exists y \in M : V(x, y)$

(b) $\forall x \in M\ \exists y \in M : V(y, x)$

(c) $\exists x \in M\ \forall y \in M : V(x, y)$

(d) $\exists x \in M\ \forall y \in M : V(y, x)$

Příklad 3 (Důkazy).
O jisté množině států E jsme zjistili, že splňuje:

1. $\forall x \in E\ \forall y \in E : V(x, y) \Rightarrow \neg V(y, x)$
2. $\forall x \in E\ \forall y \in E\ \forall z \in E : V(x, y) \land V(y, z) \Rightarrow V(x, z)$

(a) Zkuste formulovat podmínky vlastními slovy. Splňuje tyto podmínky i množina M zmíněná výše?

(b) Dokažte, že v E neexistuje stát, který vyváží víno sám sobě.

(c) * Dokažte, že v E neexistuje posloupnost států $x_0, \ldots, x_n$ t.ž. $V(x_0, x_1) \land V(x_1, x_2) \land \ldots \land V(x_{n-1}, x_n)$ kde $x_0 = x_n$.

2 Množiny

Definice. Symetrický rozdíl $A \triangle B$ definujeme jako množinu prvků, které jsou buď v A, anebo v B (ale ne v A i B zároveň).

Příklad 4 (Symetrický rozdíl pomocí ostatních operací).
Zapište množinu $A \triangle B$ pomocí množinových operací $\cup, \cap, \setminus$. Nemusíte využít všechny uvedené operace. Zkuste najít aspoň dva způsoby.

Příklad 5 (Dvouprvkové podmnožiny).
Mějme libovolnou množinu K. Uvažme všechny její podmnožiny obsahující právě dva prvky. Jaké množiny jsme z nich schopni vytvořit pomocí operace $\triangle$? Jsme takto schopni zkonstruovat libovolnou podmnožinu množiny K?

Příklad 6 (Operace na množinách).
Určete maximální počet různých množin, které můžeme získat z množin A, B aplikováním operací $\cup, \cap, \setminus$. Operace můžete opakovat i kombinovat. Stejně tak můžete libovolnou z množin použít vícekrát.

3 Hádanky

Příklad 7 (Topinky).
Jakožto chudý student nemající dost peněz na topinkovač si smažíme topinky na pánvi. Opéci jednu stranu topinky trvá 2 minuty. Na pánev se vejdou současně nejvýš dva krajíce. Jak dlouho bude trvat opečení 3 krajíců chleba? Jak dlouho bude trvat opéct n krajíců chleba?

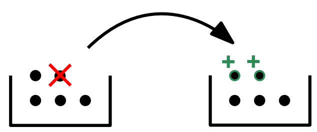
Příklad 8 (Rovnoramenná váha).
Máme k dispozici rovnoramennou váhu a 9 mincí. Jedna z mincí je ovšem falešná, což se pozná tak, že je lehčí než ostatní mince, které váží všechny stejně. Na kolik nejméně vážení dokážeme zjistit, která z mincí je falešná?

Příklad 9 (Hazard).
V casinu ti nabídli následující hru: Nejprve zaplatíš 1 euro za vstup do hry. Dále je před tebe položeno 6 přihrádek, kde v každé leží jeden cent. Můžeš ve kterémkoliv tahu vyjmout obsah všech přihrádek, takto získanou částku si ponechat a odejít ze hry. Dále můžeš zahodit jeden cent z nějaké přihrádky a vložit dva centy do přihrády bezprostředně napravo od ní.

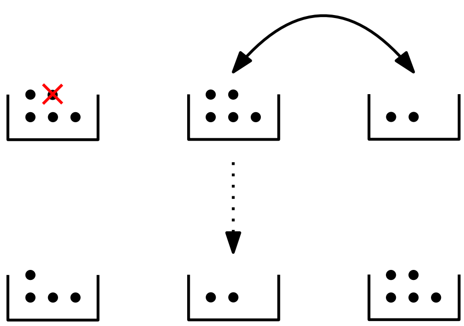
(a) Vyplatí se ti přijmout nabídku a hrát?

(b) Máš k dispozici navíc akci: Zahodit cent z nějaké přihrádky a prohodit obsah dvou přihrádek bezprostředně vpravo od této přihrádky. Kolik peněz zvládneš vydělat nyní?

Počáteční rozložení přihrádek



Základní pravidlo



Pravidlo navíc