Úvod do umělé inteligence (NAIL120)

7. cvičení

Jirka Fink

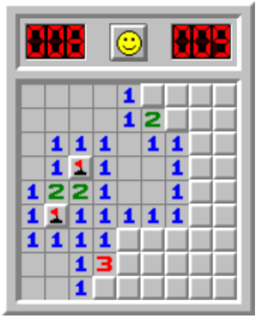
https://ktiml.mff.cuni.cz/~fink/

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

Letní semestr 2023/24

Poslední změna 8. dubna 2024

5. domácí úkol: Podmíněná pravděpodobnost



Zadání (zkráceno)

- Napište hráče pro hru hledání min (minesweeper)
- K dispozici máte
  - Velikost tabulky
  - Pravděpodobnost miny na každé pozici
  - Počet min sousedních pozic pro prozkoumaná políčka
- Napište funkci, která vrátí další pozici k prozkoumání
- Cílem je zlepšit úspěšnost triviálního hráče v zadané šabloně

Logické odvozování v čase

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných informací.

Zjednodušená deterministická varianta

- Množina všech pozic robota je M
- Robot je z pozice $u \in M$ vždy přesunut na pozici $t(u) \in M$
- Množina všech pozic odpovídající informacím z čidel v čase t je $M_t \subseteq M$
- Na počátku může být robot kdekoliv na M

Určete následující pozice, máte-li k dispozici $M_{1:t} = M_1, \dots, M_t$

- Filtering: Množinu všech pozic A_t, na kterých se robot může nacházet v čase t
- Prediction: Množinu všech pozic B_k pro čas $k \geq t$
- Smoothing: Množinu všech pozic C_k pro čas $k < t$

Pravděpodobnostní odvozování (Probabilistic reasoning/inference)

Cíl

Zjistit minulý, aktuální a budoucí stav na základě dostupných nepřesných informací.

Značení

- $e_{1:t}$: Získané informace v časech 1 až t
- X_t: Náhodná proměnná udávající stav v čase t

Základní druhy odvozování v čase

- Filtering $P(X_t|e_{1:t})$: Jaký je aktuální stav?
- Prediction $P(X_{t+k}|e_{1:t})$: Jaký bude stav v budoucnosti?
- Smoothing $P(X_{t-k}|e_{1:t})$: Jaký byl stav v minulosti?
- $\arg\max P(X_t|e_{1:t})$: Jaký je aktuálně nejpravděpodobnější stav?

Chybující robot v bludišti

- Robot se pohybuje ve 2D mřížce
- Na některých pozicích je zeď a robot zná jejich pozice
- Robot na začátku neví, kde se nachází, ale ví, kde je sever
- Robot s nějakou chybovostí ví, jestli v sousedních políčkách je zeď
- Robot se pohybuje s nějakou pravděpodobností

Formální model

Značení

- X_t: pozice robota v čase t
- e_t: informace získaná v čase t
- E_t: náhodná proměnná pro informace získané v čase t
- $P(X_1)$ počáteční umístění robota (známe)
- $P(X_t|X_{t-1})$ pravděpodobnostní pohyb robota (známe)
- $P(e_t|X_t)$ hodnoty ze senzorů o sousedních políčkách (známe)
- $P(X_k|e_{1:t})$ umístění robota v čase k s informacemi do času t (chceme spočítat)

Přechodová funkce je stacionární

$P(X_t|X_{0:t-1}) = P(X_t|X_{t-1})$
Přechodová funkce je nezávislá na předchozích stavech a je stejná ve všech časech t

Markovský předpoklad pro informace z čidel

$P(E_t|X_{0:t}, E_{1:t-1}) = P(E_t|X_t)$
Informace z čidel jsou nezávislé na předchozích stavech $X_{0:t-1}$ a předchozích informacích $E_{1:t-1}$

Filtering

Umístění robota po jednom kroku než dostaneme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_t|e_{1:t})$: Umístění robota v čase t
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u)P(X_t = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{t+1} = v|e_{1:t}, X_t = u) = P(X_{t+1} = v|X_t = u)$

Zpřesnění X_{t+1} na základě nových hodnot z čidel e_{t+1}

- Známe $P(X_{t+1}|e_{1:t})$
- Chceme spočítat $P(X_{t+1}|e_{1:t+1})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t+1}|e_{1:t}, e_{t+1}) = P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1})\frac{P(X_{t+1}|e_{1:t})}{P(e_{t+1}|e_{1:t})}$
- Hodnoty senzorů nezávisí na předchozích hodnotách
  $P(e_{t+1}|e_{1:t}, X_{t+1}) = P(e_{t+1}|X_{t+1})$
- $P(e_{t+1}|e_{1:t})$ je normalizace

Prediction

Podobně jako filtering, jen nedostáváme hodnoty z čidel

- Známe $P(X_k|e_{1:t})$ pro $k \geq t$
- Chceme spočítat $P(X_{k+1}|e_{1:t})$
- Podmíněná marginalizace
  $P(X_{k+1} = v|e_{1:t}) = \sum_u P(X_{k+1} = v|e_{1:t}, X_k = u)P(X_k = u|e_{1:t})$
- Předpokládáme, že pohyb robota závisí jen na aktuální pozici
  $P(X_{k+1} = v|e_{1:t}, X_k = u) = P(X_{k+1} = v|X_k = u)$

Smoothing

Určit poslední krok

- Chceme spočítat $P(X_{t-1}, X_t | e_{1:t})$
- Podmíněná Bayesova věta
  $P(X_{t-1}, X_t | e_{1:t-1}, e_t) = P(e_t | X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) \frac{P(X_{t-1}, X_t | e_{1:t-1})}{P(e_t | e_{1:t-1})}$
- Informace z čidel závisí jen na aktuální pozici
  $P(e_t | X_{t-1}, X_t, e_{1:t-1}) = P(e_t | X_t)$
- Product rule
  $P(X_{t-1}, X_t | e_{1:t-1}) = P(X_t | X_{t-1}, e_{1:t-1}) P(X_{t-1} | e_{1:t-1}) = P(X_t | X_{t-1}) P(X_{t-1} | e_{1:t-1})$
- Musíme si pamatovat $P(X_{t-1} | e_{1:t-1})$

Určit předchozí pozici

- Chceme spočítat $P(X_{t-1} | e_{1:t})$
- Marginalizace
  $P(X_{t-1} | e_{1:t}) = \sum_v P(X_{t-1}, X_t = v | e_{1:t})$

Jdeme dále do minulosti

- Chceme spočítat $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:t})$ pro $k < t$
- $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}, e_{k+1:t}) = P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k})\frac{P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k})}{P(e_{k+1:t}|e_{1:k})}$
- $P(e_{k+1:t}|X_k, X_{k+1}, e_{1:k}) = P(e_{k+1}, e_{k+2:t}|X_{k+1}) = P(e_{k+1}|X_{k+1})P(e_{k+2:t}|X_{k+1})$
  Hodnoty z čidel nemají žádný vliv na pohyb robota, tedy X_{k+1} závisí jen na X_k
  Hodnoty z čidel závisí jen na aktuální pozici, tedy e_k závisí jen na X_k
  Podmíněné náhodné proměnné $e_{k+1}|X_{k+1}$ a $e_{k+2}|X_{k+1}$ jsou nezávislé
- $P(X_k, X_{k+1}|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k, e_{1:k})P(X_k|e_{1:k}) = P(X_{k+1}|X_k)P(X_k|e_{1:k})$
- Musíme si pamatovat $P(X_k|e_{1:k})$
- Průběžně musíme počítat $P(e_k|X_k)$
- K výpočtu $P(X_k|e_{1:t})$ opět použijeme marginalizaci

Varianty

Můžeme použít stejný postup, jestliže senzory robota při návratu na stejné místo dávají vždy stejnou hodnotu?

Lze pomocí pravděpodobnostní postupu získat řešení logického rozhodování, pokud robot je bezchybný?

6. domácí úkol: Lokalizace v čase

Zadání (zkráceno)

- Na Marsu přistane robot, který se má dostat na základnu
- Přistání není 100 % úspěšné, takže
  - nepřistál přímo na základně, ale musí k ní dojet
  - poškodily se mu navigační systémy a většina senzorů
- Naštěstí fungují motory, takže je schopen se přesně pohybovat ve 4 základních směrech a vždy ví, jaká je jeho relativní pozice vůči místu přistání
- Funguje mu binární čidlo, které náhodně vrací True/False na základě tmavosti/světlosti dané pozice
- Má uloženou mapu, ze které pro každou pozici dokáže určit stupeň šedi
- Cílem robota je dostat se na základnu
  - nesmí vyjet mimo mapu
  - má omezenou kapacity baterie (počet kroků)

Napište program, který v každém kroku dostane binární hodnotu z čidla, a určí směr, ve kterém se má robot posunout.

(Jak) Zpřesňují hodnoty z čidel přesnost umístění robota?

Opakované čtení z čidel na jednom místě

- Uvažujme, že robot z domácího úkolu může stát na jednom místě X
- Jaké bude pravděpodobnostní rozložení $P(X|e_{1:t})$ po t načtených hodnotách?

Matematicky ekvivalentní problém

- V pytlíku máme k různě nevyvážených mincí
- Na i-té minci padá panna s pravděpodobností p_i, které známe
- Náhodně vybereme jednu minci X a výsledky k hodů označíme $e_{1:t}$
- Jak spočítat $P(X|e_{1:t})$?

Numerický příklad

- V pytlíku jsou tři mince s $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.6$ a $p_3 = 0.8$
- Náhodně jednu vybereme
- Při třech hodech padne $e_{1:3} =$ panna, orel, panna
- S jakou pravděpodobností jsme vybrali jednotlivé mince?