Úlohy k 12. cvičení

1. Nalezněte graf, který je izomorfní svému doplňku. Dokážete najít další? Je možné jich sestrojit nekonečně mnoho?

2. (**Königova věta**.) *Vrcholové pokrytí* grafu G je množina $X \subseteq V(G)$ takové, že každá hrana G je incidentní (obsahuje) s nějakým vrcholem z X. *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol G je incidentní (obsažen) s nejvýše jednou hranou z M.

   Dokažte, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí.

3. Mějme rovinné nakreslení grafu G, v němž jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme navíc, že na každém vrcholu leží buď dort, nebo zmrzlina, anebo lízátko. O stěně řekneme, že je *mňamózní*, pokud na jí příslušících vrcholech najdeme všechny tři dobroty (tj. každou právě jednou). Dokažte, že mňamózních stěn je sudý počet.

4. (Nash–Williams theorem.) Ukažte, že hrany každého rovinného grafu jde zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.

5. Ukažte, že rovinu lze obarvit konečně mnoha barvami, aby body ve vzdálenosti 1 měly různou barvu, neboli konečnou mez na barevnost grafu $(\mathbb{R}^2, \{uv\colon \|u - v\| = 1\})$. Nalezněte co nejnižší horní a co nejvyšší dolní mez.

6. Je-li G graf a k přirozené číslo, jako G^k označíme graf, kde $V(G^k) = V(G)$ a $uv \in E(G^k)$ právě když vzdálenost mezi u a v v G je nejvýše k.

   (a) Ukažte, že je-li T strom, T^3 obsahuje hamiltonovský cyklus.

   (b) Dokažte, že pro každý souvislý graf G obsahuje G^3 hamiltonovský cyklus (může se vám hodit předchozí bod).

   (c) Najděte souvislý graf G takový, že G^2 neobsahuje hamiltonovský cyklus.

7. Dokažte NP-úplnost problému 3-obarvitelnosti grafu (tj. na vstupu je neorientovaný graf G a máte rozhodnout, zda je 3-obarvitelný). To znamená dokažte, že je v NP a převeďte na něj nějaký NP-úplný problém (doporučuju 3-SAT).

8. Ukažte, že problém 2-obarvitelnosti grafu leží v P (najděte efektivní algoritmus).