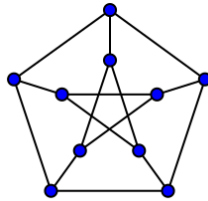


Úlohy k 11. cvičení

1. Ukažte, že pro každý rovinný graf s $v \geq 3$ platí $e \leq 3v - 6$.
2. Ukažte, že Petersenův graf není rovinný:



3. Pro dané nakreslení rovinného grafu si jako *hranici* stěny F označíme množinu vrcholů, které s F sousedí. Najděte rovinný graf a dvě jeho nakreslení taková, že množiny hranic jejich stěn nejsou stejné.
4. Nalezněte (třeba i na internetu) nakreslení K_5 , K_6 a K_7 na torus.
5. Najděte graf, který lze nakreslit na torus tak, že jeho stěny jsou homeomorfní otevřenému disku, ale také tak, že nějaká jeho stěna otevřenému disku homeomorfní není.
6. *Vnějškově rovinný graf* je takový rovinný graf, který má nakreslení, v němž všechny vrcholy leží na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.
7. Mějme rovinné nakreslení grafu G , v němž jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme navíc, že na každém vrcholu leží buď dort, nebo zmrzlina, anebo lízátko. O stěně řekneme, že je *mňamózní*, pokud na jí příslušících vrcholech najdeme všechny tři dobroty (tj. každou právě jednou). Dokažte, že mňamózních stěn je sudý počet.
8. Ukažte, že má-li rovinný graf všechny stupně sudé, pak jeho duál má barevnost rovnou dvěma.
9. (Nash–Williams theorem.) Ukažte, že hrany každého rovinného grafu jde zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.
10. Ukažte, že rovinu lze obarvit konečně mnoha barvami, aby body ve vzdálenosti 1 měly různou barvu, neboli konečnou mez na barevnost grafu $(\mathbb{R}^2, \{uv : \|u - v\| = 1\})$. Nalezněte co nejnižší horní a co nejvyšší dolní mez.
11. *Když se budete nudit*: Zkuste zobecnit Eulerovu větu pro libovolné plochy (doporučuji orientované a neorientované zvlášť). Hint: Bude z ní nerovnost, pro orientované bude na pravé straně $2 - 2g$ (g je genus) a rovnost bude nastávat pro nakreslení, kde je každá stěna homeomorfní otevřenému disku.