Úlohy k 7. cvičení

1. (**Schurova věta**.) Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.

2. (**Erdősovo–Szekeresovo lemma o podposloupnostech**.)

   (a) Dokažte, že v každé posloupnosti $(n-1)(m-1)+1$ různých přirozených čísel najdeme rostoucí podposloupnost délky n nebo klesající délky m.

   (b) Najděte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.

3. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin — jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)

4. Najděte vytvořující funkce (v uzavřeném tvaru) pro následující posloupnosti:

   $(0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$; $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$; $(1, 4, 9, 16, \ldots)$; $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$, tj. součty prvních i kladných sudých čísel.

5. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$.