Úlohy k 5. cvičení

1. *Latinský obdélník řádu* $k \times n$, $k \leq n$ je matice $L \in \{1, \dots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku i sloupci vyskytuje každé číslo nejvýše jednou. *Latinský čtverec řádu* n je latinský obdélník řádu $n \times n$. Dokažte, že každý latinský obdélník jde doplnit na latinský čtverec.

2. Dilworthova věta říká, že má-li v konečném částečném uspořádání $(P, \prec)$ nejdelší antiřetězec velikost r, pak lze P rozdělit na r řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu (přesněji řečeno tu těžší implikaci).

3. (**Happy ending problem.**) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje n bodů v konvexní poloze (tj. vrcholy konvexního n-úhelníka). Hint: Nejdřív si ručně rozmyslete, že pro $n = 4$ stačí zvolit $N = 5$.

4. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.

5. (a) Sestrojte libovolně velké $\{0, 1\}$-matice, které neobsahují 2×2 matici se samými nulami ani se samými jedničkami jako *diagonální podmatici*. Matice A o rozměrech $n \times n$ je *diagonální podmatice* $N \times N$ matice B, pokud existuje $R \in \binom{[N]}{n}$ takové, že A dostaneme z B, když vybereme řádky i sloupce s indexy z R.

   (b) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále stejné, všechny prvky nad diagonálou stejné a všechny prvky pod diagonálou stejné.

   (c) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje jen nuly nebo jen jedničky.