Úlohy k 3. cvičení

1. Nechť $G = (V, E)$ je síť tvaru mřížky 5×5, t.j. $V = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{((x,y),(x+1,y)), 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\} \cup \{((x,y),(x,y+1)), 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 4\}$ s kapacitami $c(((x,y),(x',y'))) = 1/\min\{x+y-1, 10-x-y\}$.

   Určete maximální tok ze zdroje $(1,1)$ do stoku $(5,5)$.

2. Sestrojte graf, v němž lze odebrat vrchol tak, že

   (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,

   (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může $k_v(G)$ klesnout?

3. Graf je *k-regulární*, má-li všechny stupně rovné k.

   (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.

   (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?

   (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?

4. Dokažte následující tvrzení pro vrcholově k-souvislý graf $G = (V, E)$:

   (a) Pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.

   (b) Pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq V$ velikosti k existuje k úplně vrcholově disjunktních cest z A do B.

5. Buď Q_k hyperkrychle (tj. $Q_k = (\{0,1\}^k, E)$ a $(u,v) \in E$, právě když se posloupnosti u a v liší na právě jedné pozici). Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.

6. Pro hranově 2-souvislý graf G definujeme relaci $\simeq$ na jeho hranách tak, že $e \simeq f$, pokud $e = f$ nebo $G - e - f$ není souvislý. Dokažte následující:

   (a) $e \simeq f$ právě tehdy, když e a f jsou obsaženy v týchž cyklech.

   (b) $\simeq$ je ekvivalence.

   (c) Po odstranění všech hran z nějaké ekvivalenční třídy P relace $\simeq$ dostaneme graf, jehož (netriviální) komponenty jsou hranově 2-souvislé.

   (d) Kontrahujeme-li každou komponentu $G - P$ do vrcholu, dostaneme na konci cyklus.

7. (**Robbinsova věta**) Orientovaný graf je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje orientovaná cesta. Dokažte, že hrany grafu G lze zorientovat tak, že výsledný graf $\overrightarrow{G}$ je silně souvislý, právě tehdy, když G je hranově 2-souvislý.

   (Nápověda: Využijte předchozí úlohu.)