

Znalostní otázky ke zkoušce z lineární algebry 2.

Seznam není vyčerpávající — může být požadována i znalost pojmů a skutečností, které nejsou v tomto seznamu uvedeny, ale patří do syllabu předmětu. Mimo jiné to zahrnuje všechny podstatné pojmy ze zimního semestru jako: matice, jejich vlastnosti a související operace; grupy a tělesa; vektorové prostory; báze; lineární zobrazení a jejich matice.

Přehledové otázky zahrnují relevantní definice, tvrzení, věty, příklady a souvislosti. Důkazy u přehledových otázek nejsou vyžadovány.

Čísla v závorce odpovídají pravděpodobnému (t.j. mohou se vyskytnout drobné korekce) počtu bodů za otázku, pokud se tato otázka vyskytne v písemce. U vět (x/y) znamená x bodů za formulaci věty a y za její důkaz. U přehledových otázek je nejprve uveden celkový počet bodů a pak body za některé podstatné vědomosti. Zbývající body do celkového počtu (např. u determinantů $14-2-2-5 = 5$ bodů) lze získat za relevantní fakta k tématu mimo těch vysloveně požadovaných v zadání.

Definujte permutaci.

Definujte znaménko permutace.

Definujte determinant.

Definujte adjungovanou matici.

Definujte Laplaceovu matici.

Definujte polynom nad tělesem.

Definujte kořen polynomu a jeho násobnost.

Definujte algebraicky uzavřené těleso.

Definujte Vandermondovu matici.

Definujte vlastní číslo a vlastní vektor lineárního zobrazení.

Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definujte charakteristický polynom.

Definujte algebraickou násobnost vlastního čísla.

Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla.

Definujte podobné matice.

Definujte diagonalizovatelnou matici.

Definujte Jordanův blok.

Definujte Jordanův normální tvar matice.

Definujte zobecněný vlastní vektor.

Definujte hermitovskou matici.

Definujte unitární matici.

Definujte skalární součin pro vektorové prostory nad komplexními čísly.

Definujte normu spojenou se skalárním součinem.

Definujte kolmé vektory.

Definujte ortonormální bázi.

Definujte Fourierovy koeficienty.

Definujte kolmou projekci.

Definujte isometrii.

Definujte ortogonální doplněk.

Definujte Gramovu matici.

Definujte pozitivně definitní matici.

Definujte Choleského rozklad matice.

Definujte bilineární formu.

Definujte kvadratickou formu.

Definujte matici bilineární formy vzhledem k bázi.
 Definujte analytické vyjádření bilineární formy vůči standardní bázi.
 Definujte signaturu formy.
 Definujte polární bázi.
 Vyslovte a dokažte větu o linearitě determinantu (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o determinantu součinu dvou matic (6/12).
 Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově rozvoji determinantu (8/10).
 Uveďte a dokažte Cramerovo pravidlo pro řešení soustav přes determinanty (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o adjungované matici (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o počtu koster grafu (8/14).
 Vyslovte a dokažte malou Fermatovu větu (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o Vandermondově matici (6/10).
 Uveďte a dokažte správnost Lagrangeovy interpolace (8/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o podprostoru vlastních vektorů (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o lineární nezávislosti vlastních vektorů (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o kořenech charakteristického polynomu matice (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o konstrukci matice s předepsaným charakteristickým polynomem (8/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o hodnotách tří koeficientů charakteristického polynomu matice (10/12).
 Vyslovte a dokažte větu o Geršgorinových kruzích (8/10).
 Uveďte a dokažte Cayleyovu–Hamiltonovu větu (8/14).
 Uveďte a dokažte dvě pozorování a související důsledky o násobnostech vlastních čísel podobných matic (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o vztahu geometrické a algebraické násobnosti vlastního čísla (6/10).
 Uveďte a dokažte nezbytnou a postačující podmínku, kdy je matice diagonalizovatelná (6/8).
 Uveďte a dokažte tvrzení o zobecněných vlastních vektorech (8/8).
 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizaci speciálních komplexních matic (6/14).
 Vyslovte a dokažte Cauchyovu–Schwarzovu nerovnost (6/10).
 Vyslovte a dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem (8/8).
 Uveďte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost (6/10).
 Vyslovte a dokažte pozorování o navzájem kolmých vektorech (6/8).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o Fourierových koeficientech (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o výpočtu skalárního součinu z Fourierových koeficientů (8/10).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o kolmé projekci a normě (8/10).
 Uveďte a dokažte správnost Gramovy–Schmidtovy ortonormalizace (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a normě (6/10).
 Vyslovte a dokažte větu o charakterizaci izometrie pomocí její matice (8/10).
 Vyslovte a dokažte větu o ortogonalitě a prostorech určených maticí (6/8).
 Vyslovte a dokažte větu o ortogonálním doplňku, mj. o jeho dimenzi (6/12).
 Vyslovte a dokažte větu o skalárním součinu dvou vektorů a Gramově matici (8/8).
 Uveďte a dokažte tři pozorování o vlastnostech pozitivně definitních matic vzhledem k maticovým operacím (6/9).
 Vyslovte a dokažte tvrzení o pozitivní definitnosti blokové matice (8/8).
 Vyslovte a dokažte větu o třech ekvivalentních podmínkách pro pozitivně definitní matice (6/9).
 Uveďte a dokažte větu o Choleského rozkladu včetně správnosti algoritmu pro výpočet (10/8).

Vyslovte a dokažte větu o rekurentní podmínce pro pozitivně definitní matice (10/8).

Vyslovte a dokažte větu o pozitivně definitních maticích a determinantech (8/10).

Vyslovte a dokažte větu o diagonalizovatelnosti matic forem (8/14).

Uveďte a dokažte Sylvesterův zákon setrvačnosti — o diagonalizaci kvadratických forem (10/14).

Vyslovte a dokažte větu o počtu přímek svírajících stejný úhel (6/8).

Přehledově sepište, co víte o výpočtu determinantů (14). Mimo jiné zdefinujte determinant matice libovolného řádu pomocí permutací (2) i pomocí Laplaceova rozvoje (2) a запиšte vztahy, které pro něj platí vzhledem k maticovým operacím (5).

Přehledově sepište, co víte o aplikacích determinantů (12). Mimo jiné zdefinujte adjungovanou matici (2) a zformulujte Cramerovo pravidlo (2) Cayleyovu–Hamiltonovu větu (3).

Přehledově sepište, co víte o výpočtu počtu koster grafu pomocí determinantů (10). Mimo jiné uveďte rekurenci pro počet koster (2), zdefinujte Laplaceovu matici multigrafu (2) a uveďte příslušnou větu (2).

Přehledově sepište, co víte o polynomech, jejich vlastnostech a aplikacích (8). Mimo jiné zdefinujte Vandermondovu matici (2), uveďte její užití a popište Lagrangeovu interpolaci (3).

Přehledově sepište, co víte o vlastních číslech a vlastních vektorech matic (12). Mimo jiné je nadefinujte i pro lineární zobrazení (2), zaveďte jejich možné násobnosti (4) a popište algebraické vlastnosti množin vlastních vektorů (3).

Přehledově sepište, co víte o charakteristickém polynomu (10). Mimo jiné charakteristický polynom nadefinujte (2), uveďte jeho vztah k vlastním číslům (2) a vyjádřete některé jeho koeficienty (4).

Přehledově sepište, co víte o podobných maticích a diagonalizaci (12). Mimo jiné podobnost formálně nadefinujte (2), uveďte vlastnosti podobných matic (3) a také podmínky na diagonalizovatelnost (3).

Přehledově sepište, co víte o speciálních komplexních maticích (10). Mimo jiné je nadefinujte (2), uveďte jejich základní vlastnosti (2), souvislost se skalárním součinem (1) a použití při diagonalizaci (2).

Přehledově sepište, co víte o skalárním součinu a související normě (12). Mimo jiné skalární součin i normu axiomaticky nadefinujte (3+1) a uveďte jeho vlastnosti (2) včetně Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (2).

Přehledově sepište, co víte o ortogonalitě a kolmé projekci (14). Mimo jiné ortogonalitu (1) i kolmou projekci (2) formálně zdefinujte, uveďte vlastnosti množin navzájem kolmých vektorů (2), vlastnosti projekce (3) a její užití při řešení soustav (2).

Přehledově sepište, co víte o ortonormálních bázích (14). Mimo jiné je nadefinujte (1), uveďte jejich užití v souřadných systémech (2) a popište, jak je lze získat (2).

Přehledově sepište, co víte o lineárních zobrazeních zachovávajících skalární součin (8). Mimo jiné je nadefinujte (1) a uveďte věty o jejich charakterizaci (3).

Přehledově sepište, co víte o ortogonálním doplňku (8). Mimo jiné jej nadefinujte (1) a uveďte jeho souvislost s řešením soustav (1). Uveďte větu o jeho dimenzi (2).

Přehledově sepište, co víte o pozitivně definitních maticích (14). Mimo jiné je nadefinujte (2), uveďte jejich základní vlastnosti (3) a algoritmus pro výpočet Choleského rozkladu (3).

Přehledově sepište, co víte o charakterizaci pozitivně definitních matic (10). Mimo jiné je nadefinujte (2) a uveďte jejich charakterizaci pomocí vlastních čísel (1) a determinantů (2).

Přehledově sepište, co víte o bilineárních a kvadratických formách a jejich maticích (14). Mimo jiné je axiomaticky nadefinujte (2+1), nadefinujte matice (1), popište jak se mění při změně báze (2) a uveďte dvě tvrzení o jejich diagonalizaci — obecně a Sylvesterův zákon (2+2).

Dále (zejména pro řešení úloh) je třeba zručně ovládat následující postupy (nad tělesy \mathbb{R}, \mathbb{C} , případně, kde to dává smysl i nad $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5$):

Spočítat determinant matice.

Provést rozvoj determinantu podle předepsaného řádku nebo sloupce.

Určit počet koster grafu pomocí determinantu.

Provádět operace s polynomy.

Sestavit Vandermondovu matici.

Provést Laplaceovu interpolaci.

Určit vlastní čísla a vlastní vektory matice i zobrazení.

Rozhodnout o kolmosti vektorů vzhledem ke skalárnímu součinu danému předpisem.

Spočítat kolmou projekci vektoru do podprostoru.

Provést Gramovu-Schmidtovu ortonormalizaci.

Rozhodnout, zdali je daná matice pozitivně definitní a případně určit její Choleského rozklad.

Sestavit matici kvadratické či bilineární formy z analytického vyjádření a naopak.

Spočítat matici formy při změně báze.

Určit signaturu reálné kvadratické formy.

Spočítat polární bázi.

Naposledy upraveno 13. dubna 2026.