

Poznámky ke zkoušce z lineární algebry 2.

Zkouška se skládá z prověření znalostí tří definic, jedné věty s jejím důkazem a přehledovou otázkou na jedno téma. Za každou definicí následuje jednoduchý problém pro aplikaci definice. Seznam není vyčerpávající ani povinný — občas může být požadována i znalost pojmů a skutečností, které nejsou v tomto seznamu uvedeny. Mimo jiné to zahrnuje všechny podstatné pojmy ze zimního semestru jako: matice, jejich vlastnosti a související operace; grupy a tělesa; vektorové prostory; báze; lineární zobrazení a jejich matice.

Definujte permutaci.

Definujte znaménko permutace.

Definujte determinant.

Definujte adjungovanou matici.

Definujte Laplaceovu matici.

Definujte polynom nad tělesem.

Definujte kořen polynomu a jeho násobnost.

Definujte algebraicky uzavřené těleso.

Definujte Vandermondovu matici.

Definujte vlastní číslo a vlastní vektor lineárního zobrazení.

Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice.

Definujte charakteristický polynom.

Definujte algebraickou násobnost vlastního čísla.

Definujte geometrickou násobnost vlastního čísla.

Definujte podobné matice.

Definujte diagonalizovatelnou matici.

Definujte Jordanův blok.

Definujte Jordanův normální tvar matice.

Definujte zobecněný vlastní vektor.

Definujte hermitovskou matici.

Definujte unitární matici.

Definujte skalární součin pro vektorové prostory nad komplexními čísly.

Definujte normu spojenou se skalárním součinem.

Definujte kolmé vektory.

Definujte ortonormální bázi.

Definujte Fourierovy koeficienty.

Definujte kolmou projekci.

Definujte izometrii.

Definujte ortogonální doplněk.

Definujte Gramovu matici.

Definujte pozitivně definitní matici.

Definujte Choleského rozklad.

Definujte bilineární formu.

Definujte kvadratickou formu.

Definujte matici bilineární formy vzhledem k bázi

Definujte analytické vyjádření formy

Definujte signaturu formy.

Vyslovte a dokažte větu o linearitě determinantu.
 Vyslovte a dokažte větu o determinantu součinu dvou matic.
 Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově rozvoji determinantu.
 Uveďte a dokažte Cramerovo pravidlo (řešení systémů s determinanty).
 Vyslovte a dokažte větu o adjungované matici.
 Vyslovte a dokažte větu o počtu koster grafu.
 Vyslovte a dokažte malou Fermatovu větu.
 Vyslovte a dokažte větu o Vandermondově matici.
 Uveďte a dokažte správnost Lagrangeovy interpolace.
 Vyslovte a dokažte větu o podprostoru vlastních vektorů.
 Vyslovte a dokažte větu o lineární nezávislosti vlastních vektorů.
 Vyslovte a dokažte větu o kořenech charakteristického polynomu.
 Uveďte a dokažte Cayley-Hamiltonovu větu.
 Uveďte a dokažte nezbytnou a postačující podmínku, kdy je matice diagonalizovatelná.
 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizaci speciálních komplexních matic.
 Uveďte a dokažte Cauchy-Schwarzovu nerovnost.
 Uveďte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost.
 Vyslovte a dokažte větu o Fourierových koeficientech.
 Uveďte a dokažte správnost Gram-Schmidtovy ortonormalizace (včetně lemmatu, pokud jej potřebujete).
 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a normě.
 Vyslovte a dokažte větu o izometrii a vlastnostech její matice.
 Vyslovte a dokažte větu o ortogonálním doplňku.
 Vyslovte a dokažte větu o skalárním součinu dvou vektorů a Gramově matici.
 Vyslovte a dokažte větu o třech ekvivalentních podmínkách pro pozitivně definitní matice.
 Vyslovte a dokažte větu o rekurentní podmínce pro pozitivně definitní matice.
 Vyslovte a dokažte větu o pozitivně definitních maticích a determinantech.
 Uveďte a dokažte správnost algoritmu pro výpočet Choleského rozkladu.
 Vyslovte a dokažte větu o diagonalizovatelnosti matic forem.
 Uveďte a dokažte Sylvesterův zákon setrvačnosti — o diagonalizaci kvadratických forem.
 Vyslovte a dokažte větu o počtu přímk svírajících stejný úhel.

Přehledově sepište, co víte o výpočtu determinantů.
 Přehledově sepište, co víte o determinantech a jejich geometrickém významu.
 Přehledově sepište, co víte o počtu koster grafu.
 Přehledově sepište, co víte o polynomech.
 Přehledově sepište, co víte o vlastních číslech a vlastních vektorech.
 Přehledově sepište, co víte o charakteristickém polynomu a jeho koeficientech.
 Přehledově sepište, co víte o podobných maticích a diagonalizaci.
 Přehledově sepište, co víte o speciálních komplexních maticích.
 Přehledově sepište, co víte o skalárním součinu a související normě.
 Přehledově sepište, co víte o ortogonalitě a kolmé projekci.
 Přehledově sepište, co víte o ortonormálních bazích.
 Přehledově sepište, co víte o ortogonálním doplňku.
 Přehledově sepište, co víte o pozitivně definitních maticích.
 Přehledově sepište, co víte o bilineárních a kvadratických formách a jejich maticích.

(U přehledových otázek uveďte definice, tvrzení, věty, příklady a souvislosti. Důkazy u přehledových otázek nejsou vyžadovány.)

Naposledy upraveno 13. května 2022.