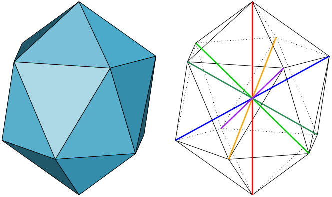
Přímky svírající stejný úhel

Problém: Kolik nejvíce může být přímek v d-dimenzionálním euklidovském prostoru $\mathbb{R}^d$ takových, že každá dvojice těchto přímek svírá stejný úhel φ?



Ukázky:
V $\mathbb{R}^2$ lze vzít 3 přímky s $\varphi = 60^\circ$.
V $\mathbb{R}^3$ lze vzít 6 přímek spojujících protilehlé vrcholy dvacetistěnu.

Věta: V $\mathbb{R}^d$ může nejvýše $\binom{d+1}{2}$ přímek svírat stejný úhel.

Důkaz: Předpokládejme existenci n takových přímek.
Z každé zvolíme vektor jednotkové délky.
Pro tyto vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ platí: $\langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ \cos\varphi & \text{jinak.} \end{cases}$

Ukážeme, že matice $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^T, \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^T, \ldots, \boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ jsou lineárně nezávislé. Pak $n \le \binom{d+1}{2}$, protože prostor symetrických matic řádu d má dimenzi $\binom{d+1}{2}$. (Je „generován“ prvky na diagonále a nad ní.)

Lineární nezávislost matic $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}, \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^\mathsf{T}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^\mathsf{T}$

Předpokládejme, že $\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\mathsf{T} = \mathbf{0}_{d,d}$ (matice $d \times d$ plná nul).

Pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$: $0 = \boldsymbol{v}_j^\mathsf{T} \mathbf{0}_{d,d} \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j^\mathsf{T} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\mathsf{T} \right) \boldsymbol{v}_j =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_j^\mathsf{T} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\mathsf{T} \boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_j \rangle^2 = a_j + \cos^2(\varphi) \sum_{i \neq j} a_i$$

Tyto podmínky na koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ zapsané soustavou rovnic:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2\varphi & \ldots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \ldots & \cos^2\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice této soustavy je regulární, proto $a_1 = \ldots = a_n = 0$.
Tudíž $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^\mathsf{T}, \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2^\mathsf{T}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^\mathsf{T}$ jsou lineárně nezávislé.