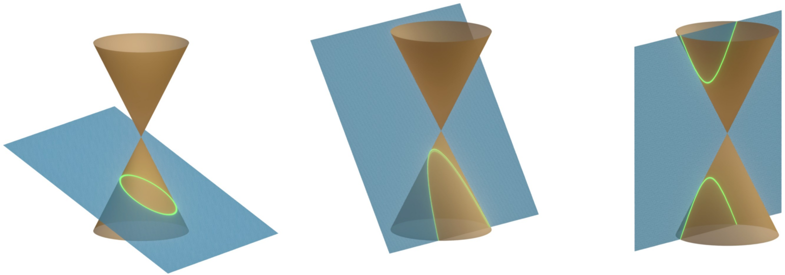
Kuželosečky a kvadriky

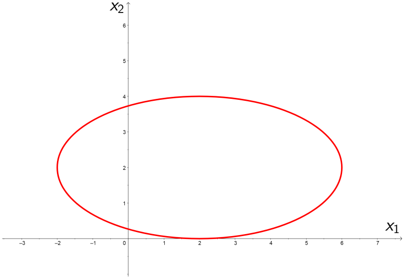
[Wiki:] *„Kuželosečka je rovinná křivka,
která vznikne jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou“*

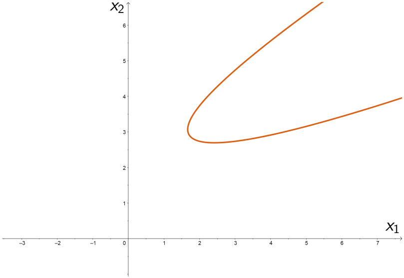


Obr: en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

Kuželosečky a kvadriky

Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + v_1x_1 + v_2x_2 + t = 0\}$





Vlevo: $(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 2)^2 = 16$ ... elipsa

Vpravo: $2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0$
... elipsa ? parabola ? hyperbola

Obr: `www.geogebra.org/graphing`

Kuželosečky a kvadriky

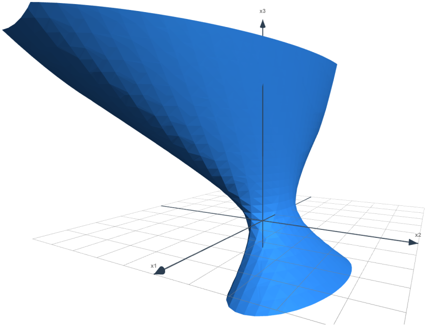
Definice: *Kuželosečka* je množina řešení homogenní rovnice s reálným polynomem stupně dva ve dvou proměnných, neboli:
$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + v_1x_1 + v_2x_2 + t = 0\}$
Stejná rovnice zapsaná pomocí matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ a vektoru $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + t = 0$$

(Buď volíme $a_{21} = 0$ nebo koeficient u x_1x_2 rozdělíme symetricky.)
Definice: Pro matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ a skalár $t \in \mathbb{R}$ je *kvadrika* množina $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + t = 0\}$.

V nedegenerovaném případě dostaneme $(d-1)$-dimenzionální plochu v prostoru dimenze d.

$$x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 = 0$$



Obr: www.math3d.org

Aplikace

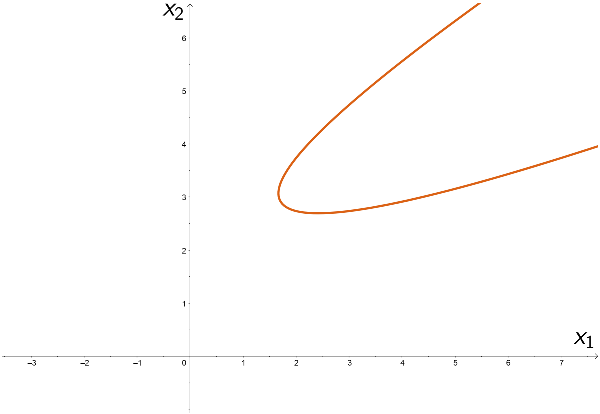
- pohyb planet v astronomii — elipsy
- konstrukce optických zrcadel a mikrofonů
  — parabolické plochy
- lineární programování — elipsoidová metoda
- fyzika — výpočet napětí uvnitř tělesa nebo
  popis rotačního pohybu tuhých těles (např. gyroskopy)
- statistika — analýza hlavních komponent např. pro snížení velikosti velkých souborů dat bez významné ztráty dat
- informatika — rozpoznávání vzorů, neuronové sítě
- elektronika — návrh a analýza chování obvodů
- aritmetika, teorie čísel, . . .

Transformace kvadriky

- Dána $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} + t = 0$ se symetrickou $\boldsymbol{A}$ vůči bázi B.
- Najdeme bázi C, aby $[\mathrm{id}]_{C,B}$ byla ortogonální a $\boldsymbol{D} = [id]_{C,B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}$ byla diagonální.
- Provedeme (první) substituci $\boldsymbol{x} = [\mathrm{id}]_{C,B}\boldsymbol{y}$, čímž dostaneme $\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} + t = 0$ pro $\boldsymbol{w} = [\mathrm{id}]_{C,B}^\mathsf{T}\boldsymbol{v}$.
  Geometricky jde o isometrii, čili natočení systému souřadnic.
- Pro každé $d_{ii} \neq 0$ nahradíme (podruhé) $y_i = z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}}$.
  Jde o takový posun počátku souřadnicového systému, že
  $d_{ii}y_i^2 + w_i y_i = d_{ii}\left(z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}}\right)^2 + w_i\left(z_i - \frac{w_i}{2d_{ii}}\right) = d_{ii}z_i^2 - \frac{{w_i}^2}{4d_{ii}}$
  čili nenulové kvadratické členy pohltí své lineární členy.

  Dostaneme $\boldsymbol{z}^\mathsf{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}^\mathsf{T}\boldsymbol{z} + s = 0$,
  $$u_i = \begin{cases} 0 & \text{pro } d_{ii} \neq 0 \\ w_i & \text{pro } d_{ii} = 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad s = t - \sum_{d_{ii}\neq 0} \frac{w_i^2}{4d_{ii}}.$$
- Nyní snáze odvodíme tvar, osy, střed a další parametry.

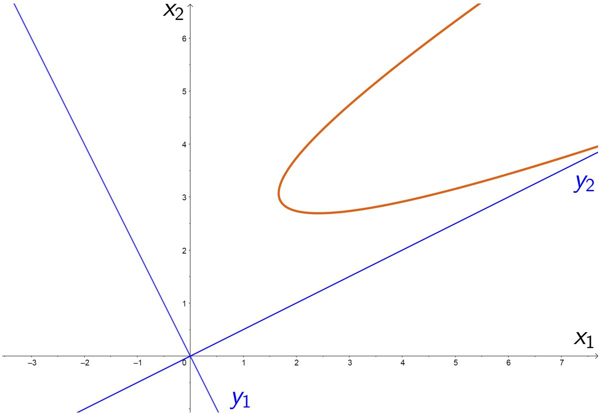
Ukázka transformace



$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 + (8\sqrt{5} - 4)x_1 - (16\sqrt{5} + 2)x_2 + 50 = 0$$

Diagonalizujeme matici $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ pro nalezení nové báze.

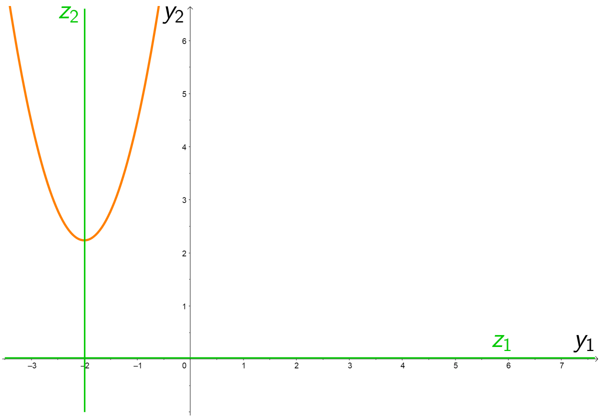
Ukázka transformace



Třeba použít ortogonální $[\mathrm{id}]_{C,B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$,

abychom provedli pouze isometrii (rotaci os).

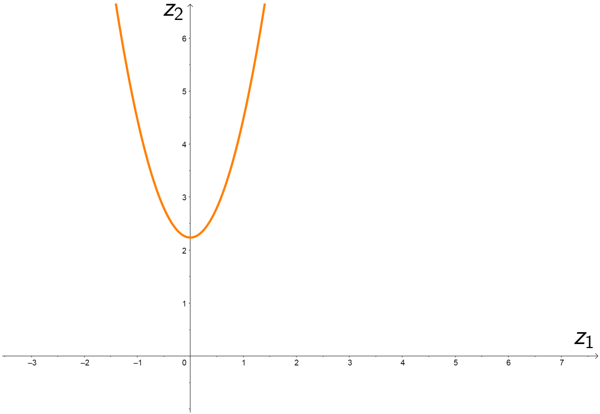
Ukázka transformace



$$10y_1^2 - 2\sqrt{5}y_2 + 40y_1 + 50 = 0$$

Provedeme substituci $y_1 = z_1 - 2$, $y_2 = z_2$ (horizontální posun).

Ukázka transformace



Výsledná parabola: $10z_1^2 - 2\sqrt{5}z_2 + 10 = 0$.

(Tu lze svisle posunout do počátku a eliminovat konstantní člen.)