Kvadratické formy nad tělesy charakteristiky 2

Je-li $\mathrm{char}(T) = 2$, potom některé kvadratické formy g nelze odvodit z žádné symetrické bilineární formy, např. $g(\boldsymbol{v}) = v_1 v_2$. Proto matice takových forem g není definována.

Na druhou stranu, je-li $\boldsymbol{A}$ symetrická matice řádu n, potom pro analytické vyjádření formy $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^\mathsf{T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}$ platí: $g(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} v_i^2$,
protože každý ze smíšených členů $a_{ij} v_i v_j$ se odečte s $a_{ji} v_j v_i$.
Je-li totiž $\mathrm{char}(T) = 2$, pak $a_{ij} v_i v_j + a_{ji} v_j v_i = (1+1) a_{ij} v_i v_j = 0$.

Ukázka: $\boldsymbol{v}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = v_1^2 + v_1 v_2 + v_2 v_1 = v_1^2 = \boldsymbol{v}^\mathsf{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}$

Důsledek: Lze-li kvadratickou formu g nad T charakteristiky 2 vyjádřit součinem $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^\mathsf{T} \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}$ se symetrickou $\boldsymbol{A}$, potom ji lze vyjádřit pomocí $g(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^\mathsf{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{v}$ s diagonální maticí $\boldsymbol{D}$.
Tyto formy obsahují jen kvadratické členy a žádné smíšené.
Matice $\boldsymbol{D}$ je dána jednoznačně vztahem $d_{ii} = a_{ii}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Diagonalizace matic forem nad ostatními tělesy

Věta: Je-li g kvadratická forma na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad tělesem T charakteristiky odlišné od 2, pak forma g má diagonální matici vzhledem k vhodné bázi B. (Věta platí i pro symetrické bilineární formy.)

Definice: *Polární báze* dává diagonální matici kvadratické formy.

Přeformulováno jako *diagonalizace matic kvadratických forem*:

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Ukázka: Matici formy $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lze nad $\mathbb{Z}_3$ diagonalizovat např.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nad $\mathbb{Z}_2$ by $g(\boldsymbol{v}) = 0$, ale součin tří regulárních není $\mathbf{0}$, proto tuto matici nelze nad $\mathbb{Z}_2$ diagonalizovat součinem $\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$.

Poznámka: U *reálných* matic věta platí již díky diagonalizaci symetrických matic lineárních zobrazení pomocí *ortogonálních* $\boldsymbol{R}$. Ty splňují $\boldsymbol{R}^\mathsf{T} = \boldsymbol{R}^{-1}$, a tak jsou diagonální i $\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

$$\text{Označme } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{array}\right].$$

- Pro $a_{11} \neq 0$ a $\boldsymbol{P}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array}\right]$

$$\text{máme } \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{B} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right]$$

kde $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}$ je symetrická.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{array}\right)$.

- Pro $a_{11} \neq 0$ a $\boldsymbol{P}_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{array}\right)$ máme $\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{array}\right)$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right)$.

$$\text{Pak } \boldsymbol{R}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^{\mathsf{T}} \end{array}\right) \cdot \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{R}_{n-1} \end{array}\right) \quad \text{je diagonální.}$$

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

$$\text{Označme } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array}.$$

▶ Pro $a_{11} \neq 0$ a $\boldsymbol{P}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ \hline \end{array}$ máme $\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \hline \end{array}$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline \end{array}$.
Potom $\boldsymbol{R}_n^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n$ je diagonální.

Ukázka: $T = \mathbb{Z}_3$, $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{R}_3^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta: Pro jakoukoli symetrickou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ s $\mathrm{char}(T) \neq 2$ existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{b}^\mathsf{T} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$.

- Pro $a_{11} \neq 0$ a $\boldsymbol{P}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$ máme $\boldsymbol{P}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \end{pmatrix}$,

kde $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^\mathsf{T}$ je symetrická. Dle indukčního předpokladu určíme $\boldsymbol{R}_{n-1}$ pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$. Zvolíme $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{pmatrix}$.
Potom $\boldsymbol{R}_n^\mathsf{T}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n$ je diagonální.

- Pokud $a_{11} = 0$, ale $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, pak $a_{i1} \neq 0$ pro nějaké i.

Pokud $a_{ii} = 0$, použijeme elementární matici $\boldsymbol{E}$ pro přičtení i-tého sloupce k prvnímu. Poté vezmeme $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{E}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$ namísto $\boldsymbol{A}$. Protože $a'_{11} = 2a_{i1} \neq 0$, lze postupovat stejně jako v předchozím případě.
Jinak použijeme $\boldsymbol{E}$ pro záměnu i-tého a j-tého sloupce a analogicky dostaneme $a'_{11} = a_{ii} \neq 0$.

- Pro $a_{11} = 0$ a $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ vezmeme $\boldsymbol{A}_{n-1} = \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{R}_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \end{pmatrix}$.

Metody diagonalizace

- Reálné symetrické lze diagonalizovat pomocí vlastních čísel.
- Gaussovou eliminací — každou řádkovou operaci provedeme *současně* na řádky i na sloupce.

Pozorování: Je-li $\boldsymbol{A}$ symetrická, je $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{E}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$ také symetrická.

Důsledek: Dolní trojúhelníková $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je i diagonální.

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{ř.}}{\overset{\text{II-I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{sl.}}{\overset{\text{II-I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III+I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{III-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ve výsledné blokové matici je vlevo diagonální matice $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$
a vpravo je matice *řádkových úprav* čili $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$.
Vektory polární báze B jsou sloupce $\boldsymbol{R} = [\mathrm{id}]_{B,E}$ čili řádky této $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$.

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

Definice: Nechť reálná kvadratická forma g má diagonální matici $\boldsymbol{D}$ obsahující pouze 1, -1 a 0. *Signatura* formy g je trojice $(\#1, \#-1, \#0)$, počítáno na diagonále matice $\boldsymbol{D}$.

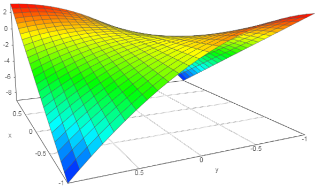
Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

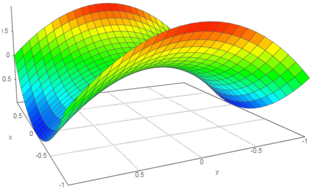
Ukázka: $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ vzhledem k E.

Matice g vzhledem k bázi: $B = \left((\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T, (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T \right)$ je

$$\boldsymbol{D} = [\mathrm{id}]_{B,E}^T \, \boldsymbol{A} \, [\mathrm{id}]_{B,E} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

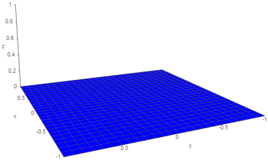


$6x_1x_2 - 3x_2^2$

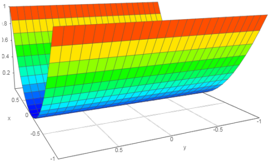


$x_1^2 - x_2^2$

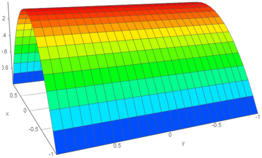
Diagonalizované kvadratické formy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



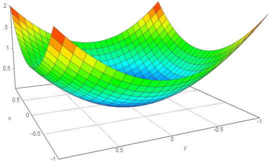
0, signatura $(0, 0, 2)$



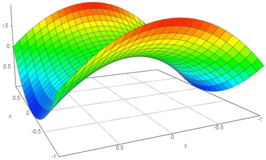
x_1^2, sig. $(1, 0, 1)$



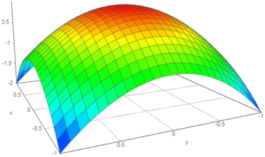
$-x_1^2$, sig. $(0, 1, 1)$



$x_1^2 + x_2^2$, sig. $(2, 0, 0)$



$x_1^2 - x_2^2$, sig. $(1, 1, 0)$



$-x_1^2 - x_2^2$, sig. $(0, 2, 0)$

(seřazeno podle hodnosti a poté 1 před -1)

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

Důkaz:

1. Existence: Nechť $\boldsymbol{A}$ je maticí formy vzhledem k nějaké bázi B. Reálné symetrické matice lze diagonalizovat, čili $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}' \boldsymbol{R}$ pro regulární $\boldsymbol{R}$ a diagonální $\boldsymbol{D}'$. Rozložíme $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{S}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{S}$, kde

$$\begin{cases} \text{pro } d'_{ii} = 0 : d_{ii} = 0, & s_{ii} = 1, \\ \text{pro } d'_{ii} > 0 : d_{ii} = 1, & s_{ii} = \sqrt{d'_{ii}}, \\ \text{pro } d'_{ii} < 0 : d_{ii} = -1, & s_{ii} = \sqrt{-d'_{ii}}. \end{cases}$$

Nyní je $\boldsymbol{SR}$ regulární a $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{SR})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{DSR}$.

Zvolíme bázi C tak, že souřadnice vektorů C vzhledem k B jsou sloupce $(\boldsymbol{SR})^{-1}$, tzn. $[\mathrm{id}]_{C,B} = (\boldsymbol{SR})^{-1}$ (neboli $[\mathrm{id}]_{B,C} = \boldsymbol{SR}$).

Nyní $[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} [\mathrm{id}]_{C,B} = ((\boldsymbol{SR})^{-1})^{\mathsf{T}} (\boldsymbol{SR})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{DSR} (\boldsymbol{SR})^{-1} = \boldsymbol{D}$ je hledaná diagonální matice formy vůči bázi C.

Sylvesterův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném *reálném* vektorovém prostoru má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s 1, -1 a 0. Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný počet 1 a stejný počet -1.

Ukázka:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -2 \\ -10 & 4 & 8 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}' \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{D}' = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{S}$$

$$[\mathrm{id}]_{B,C} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 2 & -2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

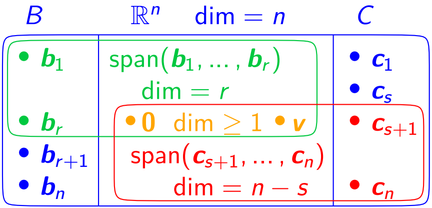
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D}' \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{S}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{S} \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{R})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{S} \boldsymbol{R} = [\mathrm{id}]_{B,C}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{D} [\mathrm{id}]_{B,C}$$

$$\Leftrightarrow \quad [\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} [\mathrm{id}]_{C,B} = \boldsymbol{D}$$

2. Jednoznačnost počtu 1, -1 a 0:
Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$, $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Protože součiny s regulárními maticemi $[\mathrm{id}]_{C,B}$ nemění hodnost:
$\#0$ v $\boldsymbol{B} = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = \#0$ v $\boldsymbol{C}$.

Označme $r = \#1$ v $\boldsymbol{B}$ a $s = \#1$ v $\boldsymbol{C}$. Pokud by $r > s$, pak uvažme podprostory $\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ a $\operatorname{span}(\boldsymbol{c}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n, a proto mají netriviální průnik.



Používáme větu o průniku a spojení: $\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(\operatorname{span}(U \cup V))$

Levá strana je ostře větší než n, $\dim(\operatorname{span}(U \cup V)) \leq \dim \mathbb{R}^n = n$
$\Rightarrow \quad \dim(U \cap V) \geq 1$

2. Jednoznačnost počtu 1, -1 a 0:
Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$, $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ formy g jsou diagonální s 1, -1 a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a 0 jsou poslední.

Protože součiny s regulárními maticemi $[\mathrm{id}]_{C,B}$ nemění hodnost:
$\#0 \text{ v } \boldsymbol{B} = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = \#0 \text{ v } \boldsymbol{C}$.

Označme $r = \#1$ v $\boldsymbol{B}$ a $s = \#1$ v $\boldsymbol{C}$. Pokud by $r > s$, pak uvažme podprostory $\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r)$ a $\operatorname{span}(\boldsymbol{c}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{c}_n)$. Součet jejich dimenzí $r + n - s$ přesahuje n, a proto mají netriviální průnik.
Zvolme $\boldsymbol{v} \in (\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_r) \cap \operatorname{span}(\boldsymbol{c}_{s+1}, \dots, \boldsymbol{c}_n)) \setminus \mathbf{0}$, čili
$[\boldsymbol{v}]_B = (a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)^{\mathsf{T}}$, $[\boldsymbol{v}]_C = (0, \dots, 0, d_{s+1}, \dots, d_n)^{\mathsf{T}}$.
Protože $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, alespoň jedno z $a_1, \dots, a_r$ je nenulové.

Tato $a_1, \dots, a_r$ odpovídají 1 v diagonální matici $\boldsymbol{B}$, a proto platí:
$g(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B} [\boldsymbol{v}]_B = a_1^2 + \cdots + a_r^2 > 0$. Podobně odvodíme:
$g(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_C^{\mathsf{T}} \boldsymbol{C} [\boldsymbol{v}]_C = -d_{s+1}^2 - \ldots - d_{\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})}^2 \leq 0$, protože nenulové dílčí součiny tvoří jen $d_{s+1}, \dots, d_{\operatorname{rank}(\boldsymbol{C})}$ z $[\boldsymbol{v}]_C$ a -1 z diagonály $\boldsymbol{C}$.

Ze sporu vyplývá, že $r \not> s$. Symetricky též $s \not> r$, a proto $r = s$.

Poznámky

Pozorování: Formy s *reálnými* pozitivně definitními maticemi jsou ty, které lze diagonalizovat na $\mathbf{I}$.

— porovnejte s Choleského faktorizaci $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{I}\boldsymbol{U}$.

Pozorování: Analogická věta pro *komplexní symetrické* formy (jiné matice než hermitovské!) dává diagonální matice s 1 a 0 na diagonále; včetně setrvačnosti.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež?
   Lze-li matici kvadratické formy diagonalizovat, potom na diagonále výsledné matice jsou vlastní čísla původní matice.
2. Pokud je $\boldsymbol{B}$ matice formy vůči bázi B a $\boldsymbol{C}$ je matice téže formy vůči bázi C, potom mezi nimi platí vztah:
   a) $\boldsymbol{B} = [\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{C} [\mathrm{id}]_{B,C}$, b) $\boldsymbol{B}[\mathrm{id}]_{C,B} = [\mathrm{id}]_{B,C}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{C}$,
   c) $\boldsymbol{B} = [\mathrm{id}]_{B,C} \boldsymbol{C} [\mathrm{id}]_{B,C}^{\mathsf{T}}$, d) $[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}[\mathrm{id}]_{B,C}$.
3. Každá kvadratická forma nad $\mathbb{Z}_5$ má diagonální matici, jejíž prvky na diagonále jsou z množiny $\{0, 1, a\}$, kde a je:
   a) 2, b) 3, c) 4, d) 5.
4. Kolik různých signatur existuje pro formy v $\mathbb{R}^3$?
   a) 3, b) 9, c) 10, d) 27, e) nekonečně mnoho.

Komentář k řešení kvízu

1. Např. matice $\boldsymbol{A} = \mathbf{I}$ má vlastní číslo 1, ovšem stejná forma má i matici $4\mathbf{I} = (2\mathbf{I})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}(2\mathbf{I})$, a na její diagonále žádná 1 není. Vlastní čísla dostaneme jen v případě, že $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$.
2. Z korektního vztahu $\boldsymbol{B} = [\mathrm{id}]_{B,C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{C}[\mathrm{id}]_{B,C}$ lze odvodit b) součinem s $[\mathrm{id}]_{B,C}^{-1} = [\mathrm{id}]_{C,B}$ zprava; d) podobně; a) špatný přechod u levé matice; c) transpozice na špatné straně.
3. a) protože $3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, lze 3 diagonalizovat pomocí 2, podobně i $4 = 2 \cdot 1 \cdot 2$, b) analogicky ze $2 = 3^3$, $4 = 3^2$, c) 2 ani 3 nelze vyjádřit součinem 1 a 4, d) $5 \notin \mathbb{Z}_5$.
4. Počet forem je roven počtu rozdělení 3 na tři nezáporné celočíselné sčítance, což lze provést $\binom{5}{2} = 10$ způsoby.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je pravda, že pokud lze symetrickou matici $\boldsymbol{A}$ diagonalizovat pomocí $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$, pak $\boldsymbol{R}$ lze vždy zvolit horní trojúhelníkovou?
- Je pravda, že když má kvadratická forma g na V nad $\mathbb{R}$ diagonální matici s nějakými 1 a nějakými -1, pak existují vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ takové že $g(\boldsymbol{u}) < 0 < g(\boldsymbol{v})$?
- Je-li matice $\boldsymbol{A}$ diagonalizována pomocí ortogonální $\boldsymbol{R}$, jaký je vztah mezi původní a novou (t.j. polární) bází?
- Jakým situacím v důkazu zákona setrvačnosti odpovídají případy, kdy matice $\boldsymbol{B}$ nebo $\boldsymbol{C}$ nemají na diagonále žádné 1? (Čili $r = 0$ nebo $s = 0$.)
- Za jakých okolností platí v témže důkazu $[\boldsymbol{v}]_C^{\mathsf{T}}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{v}] = 0$?