Bilineární a kvadratické formy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a nechť zobrazení $f : V \times V \to T$ splňuje:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \forall t \in T : f(t\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}, t\boldsymbol{v}) = tf(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$

Poté se f nazývá *bilineární forma* na V.

Bilineární forma je *symetrická*, když $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$.

Zobrazení $g : V \to T$ se nazývá *kvadratická forma*, pokud existuje bilineární forma f taková, že $g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ pro všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

Příklady: Každý skalární součin na prostoru nad $\mathbb{R}$, *ale ne nad* $\mathbb{C}$!

Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$, bilineární forma:

$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$

Odpovídající kvadratická forma:

$g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = v_1 v_1 + 2v_1 v_2 + 4v_2 v_1 + 3v_2 v_2 = v_1^2 + v_1 v_2 + 3v_2^2$

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B* je matice $\boldsymbol{A}$ o složkách $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$.
Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.

Ukázka: Pro $V = \mathbb{Z}_5^2$ a přirozenou bázi E, má bilineární forma $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2$ matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ a kvadratická forma $g(\boldsymbol{v}) = v_1^2 + v_1 v_2 + 3v_2^2$ má matici $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Na $V = \mathbb{Z}_2^2$ odpovídá kvadratické formě $g(\boldsymbol{v}) = v_1 v_2$ např. bilineární forma s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ale žádná symetrická.

Matice forem

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. *Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B* je matice $\boldsymbol{A}$ o složkách $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j)$.
Matice kvadratické formy g je matice symetrické bilineární formy f odpovídající g, pokud taková symetrická f existuje.

Pozorování: $a_{ij} = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) = \frac{1}{2}(g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) - g(\boldsymbol{b}_i) - g(\boldsymbol{b}_j))$

Důkaz:
$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) &= f(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) \\ &= f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) + f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j) \end{aligned}$$
$$g(\boldsymbol{b}_i + \boldsymbol{b}_j) - g(\boldsymbol{b}_i) - g(\boldsymbol{b}_j) = f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) + f(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_i)$$

Pozorování: Použití matic forem:
$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u}]_B^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B, \quad g(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B.$$

Důkaz: Když $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i$ a $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{b}_j$, pak
$$f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i, \sum_{j=1}^{n} d_j \boldsymbol{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i f(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j) d_j = [\boldsymbol{u}]_B^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} [\boldsymbol{v}]_B$$

Pozorování: Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice bi/kv formy vzhledem k bázi B. Potom $[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}$ je matice stejné formy vzhledem k bázi C.

Důkaz: $[\boldsymbol{u}]_B = [\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{u}]_C$, $[\boldsymbol{v}]_B = [\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C$,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= [\boldsymbol{u}]_B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{v}]_B = ([\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{u}]_C)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C \\ &= [\boldsymbol{u}]_C^{\mathsf{T}}[\mathrm{id}]_{C,B}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{C,B}[\boldsymbol{v}]_C. \end{aligned}$$

Definice: *Analytické vyjádření* bilineární formy f nad T^n s maticí $\boldsymbol{A}$ je homogenní polynom f druhého stupně ve $2n$ proměnných daný výrazem: $f((u_1,\ldots,u_n)^{\mathsf{T}},(v_1,\ldots,v_n)^{\mathsf{T}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_iv_j$.

…analogicky pro kvadratické formy a/nebo vzhledem k bázi B.

Ukázka: Forma f s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ má analytické vyjádření $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = u_1v_1 + 2u_1v_2 + 4u_2v_1 + 3u_2v_2$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež? Kvadratická forma získaná ze skalárního součinu na $\mathbb{R}$ je normou.
2. Kolik bilineárních forem odpovídá jedné kvad. formě na $\mathbb{Z}_5^3$?
   a) 1, b) 3, c) 5, d) 15, e) 27, f) 125, g) nekonečně mnoho.
3. Pro bilineární formu $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ jsou kvadratické formy odpovídající formám $f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ a $(1 + 1)f(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
   a) stejné, b) různé, c) stejné jen nad tělesy char $\neq 2$.
4. Analytická vyjádření $g((v_1, v_2)^\mathsf{T})$ kvadratické formy g nad $\mathbb{R}^2$ vzhledem k E a vzhledem k bázi $B = ((0, 1)^\mathsf{T}, (1, 0)^\mathsf{T})$
   a) jsou stejná, což platí i pro jakékoli jiné báze;
   b) jsou stejná pro tento konkrétní výběr bází;
   c) mají zaměněné koeficienty u kvadratických členů;
   d) nemají žádný přímý vztah mezi koeficienty.

Komentář k řešení kvízu

1. Normou je odmocnina z kvadratické formy.
2. Každá bilineární forma je dána svou maticí vůči pevné bázi, např. E. Prvky na diagonále jsou dány jednoznačně. Zvolíme-li si každý prvek nad diagonálou a_{ij}, jednoznačně dopočítáme prvek pod diagonálou $a_{ji} = g(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - g(\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{e}_j) - a_{ij}$. Prvky nad diagonálou jsou 3 a v $\mathbb{Z}_5$ je lze zvolit 5^3 způsoby.
3. Přímočaře: $g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (1+1)f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$.
4. V bázi B je oproti E jen zaměněné pořadí vektorů, čili ve vektoru $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{v}]_B$ je $u_1 = v_2$ a $u_2 = v_1$. Proto $g((v_1, v_2)^T) = a_{11}v_1^2 + (a_{12} + a_{21})v_1 v_2 + a_{22}v_2^2 =$ $a_{22}u_1^2 + (a_{12} + a_{21})u_1 u_2 + a_{11}u_2^2 = g((u_1, u_2)^T)$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Pokud existuje symetrická forma, který odpovídá dané kvadratické formě, je pak jednoznačná?
- Jak se změní koeficienty analytického vyjádření, když změníme bázi?