Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a matice $\boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}} \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}$ je pozitivně definitní.

Pozorování: Gaussova eliminace prvního sloupce pomocí prvního

řádku hermitovské matice dává: $\begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array} \sim\sim \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}} \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \end{array}$

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{array}\right)$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \end{array}\right]$ je pozitivně definitní,

právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a matice $\boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}} \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}$ je pozitivně definitní.

Důsledek: Pozitivně definitní matice lze rozpoznat Gaussovou eliminací, ale sloupce je třeba eliminovat shora dolů odečítáním vhodných násobků řádku s pivotem od řádků pod ním, tzn. *nelze měnit pořadí řádků ani řádky násobit skalárem*.

Má-li výsledná horní trojúhelníková matice kladnou diagonálu, pak je výchozí matice pozitivně definitní.

Ukázka:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|cc} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \cline{2-4} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \cline{2-4} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ \cline{2-4} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{array}\right)$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^+$ a matice $\boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}$ je pozitivně definitní.

Důsledek: Pozitivně definitní matice lze rozpoznat Gaussovou eliminací, ale sloupce je třeba eliminovat shora dolů odečítáním vhodných násobků řádku s pivotem od řádků pod ním,
tzn. *nelze měnit pořadí řádků ani řádky násobit skalárem*.

Má-li výsledná horní trojúhelníková matice kladnou diagonálu, pak je výchozí matice pozitivně definitní.

Ukázka:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

Rekurentní podmínka

Věta: Bloková matice $\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array}$ je pozitivně definitní,

právě když $a_{11} \in \mathbb{R}^{+}$ a matice $\boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}} \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}$ je pozitivně definitní.

Důkaz: Gaussova eliminace prvního sloupce $\boldsymbol{A}$ odpovídá součinu:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{H}} \\ \hline -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b} & \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \end{array}$$

Následně dostáváme:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{H}} \\ \hline -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b} & \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{11} & \mathbf{0}^{\mathrm{H}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{B} - \frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} \\ \hline \end{array}$$

Matice elementárních úprav je regulární, a tak $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když výsledná bloková matice je pozitivně definitní.

To nastává, právě když má oba nenulové bloky pozitivně definitní.

Sylvesterova podmínka

Věta: Hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je pozitivně definitní, právě když matice $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ mají kladné determinanty, kde $\boldsymbol{A}_i$ se sestává z prvních i řádků a sloupců $\boldsymbol{A}$.

Ukázka:

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_4| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{vmatrix} = 38 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$|\boldsymbol{A}_1| = \det(4) = 4 > 0$$

Všechny determinanty jsou kladné, proto je $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní.

Sylvesterova podmínka

Věta: Hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ řádu n je pozitivně definitní, právě když matice $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ mají kladné determinanty, kde $\boldsymbol{A}_i$ se sestává z prvních i řádků a sloupců $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: Použijeme Gaussovu eliminaci $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ pro test, zda je $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní. Nechť $a'_{11}, \ldots, a'_{nn}$ jsou prvky na diagonále výsledné horní trojúhelníkové matice $\boldsymbol{A}'$.
Protože jsme eliminovali řádky shora dolů,
máme $\det \boldsymbol{A}_i = \det \boldsymbol{A}'_i = \prod\limits_{j \le i} a'_{jj} = \det \boldsymbol{A}_{i-1} a'_{ii}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \text{ je pozitivně definitní} &\Leftrightarrow a'_{11}, \ldots, a'_{nn} > 0 \\ &\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A}_1, \ldots, \det \boldsymbol{A}_n > 0. \end{aligned}$$

Ukázka:

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 \\ \boldsymbol{A}_4 \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 7 & \frac{79}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{27}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{2} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \boldsymbol{A}'_1 \\ \boldsymbol{A}'_2 \\ \boldsymbol{A}'_3 \\ \boldsymbol{A}'_4 \end{array}$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Který z testů pozitivní definitnosti je asymptoticky výpočetně nejrychlejší? a) Choleského rozklad, b) Gaussova eliminace, c) rekurentní podmínka, d) Sylvesterova podmínka,[1] e) všechny mají stejnou asymptotickou složitost.
2. V rekurentní podmínce na test pozitivní definitnosti:
   a) a_{11} i $\boldsymbol{b}$ musejí být nenulové, b) a_{11} i $\boldsymbol{b}$ mohou být nulové,
   c) a_{11} může být nulové, ale $\boldsymbol{b}$ musí být nenulový,
   d) a_{11} musí být nenulové, ale $\boldsymbol{b}$ může být nulový.
3. Pravda nebo lež? Je-li v Sylvesterově podmínce $\det \boldsymbol{A}_i = 0$, pak pro všechny menší matice, t.j. pro $j \leq i$, platí $\det \boldsymbol{A}_j = 0$.
4. $\boldsymbol{A}_n$ je negativně definitní matice ($\boldsymbol{v}^H \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{v} < 0$), právě když
   a) $\det(\boldsymbol{A}_i) < 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$
   b) $\det(\boldsymbol{A}_1) < 0$, a $\det(\boldsymbol{A}_i) > 0$, pro všechna $i = 2, \ldots, n$
   c) $\det(\boldsymbol{A}_i) \begin{cases} < 0 & \text{pro lichá } i \in \{1, \ldots, n\} \\ > 0 & \text{pro sudá } i \in \{1, \ldots, n\} \end{cases}$

[1] Míněno výpočet každého determinantu zvlášť.

Komentář k řešení kvízu

1. a-c) mají složitost $O(n^3)$, zatímco d) vyžaduje $O(n^4)$ operací.
2. Pouze a_{11} je použito pro dělení. Je-li $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, je i $\frac{1}{a_{11}}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$.
3. Neplatí např. pro matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Negativně definitní $\boldsymbol{A}_n$ lze Gaussovou eliminací převést na trojúhelníkovou matici $\boldsymbol{A}'$ se zápornými prvky na diagonále. Proto její podmatice $\boldsymbol{A}_i$ sudých řádů mají kladný determinant a podmatice lichých řádů mají determinant záporný.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Proč při testování pozitivně definitních matic Gaussovou eliminací nelze měnit pořadí řádků?
- Co lze odvodit o rekurentní podmínce a determinantech pro negativně definitní, semidefinitní a indefinitní matice?