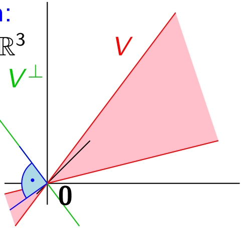
Ortogonální doplněk

Definice: *Ortogonální doplněk* podmnožiny V prostoru U se skalárním součinem je $V^\perp = \{\boldsymbol{u} \in U : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\}$.

Ukázka:

$U = \mathbb{R}^3$

$W = V^\perp$



Pozorování:

Pokud $W \subseteq V$, pak $W^\perp \supseteq V^\perp$.

Důkaz:

$V^\perp = \{\boldsymbol{u} \in U : \forall \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}\} \subseteq \{\boldsymbol{u} \in U : \forall \boldsymbol{w} \in W : \boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{w}\} = W^\perp$

Pozorování: Každý ortogonální doplněk je podprostorem U.

Důkaz: $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \langle t\boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = t\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = t \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; (t\boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v} \rangle = 0 \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{v}$

Pozorování: Pro každý podprostor $V \subseteq U$ platí: $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Důkaz: Jestliže $\boldsymbol{u} \in V \cap V^\perp$, pak $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle = 0$, a proto $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Doplňky prostorů určených reálnou maticí

Ukázka:
Pro reálnou matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 15 & 9 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proto $R_{\boldsymbol{A}} = \operatorname{span}\{(1,3,4,5)^{\mathsf{T}}, (0,0,1,-2)^{\mathsf{T}}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$,
a také $\ker \boldsymbol{A} = \operatorname{span}\{(-13,0,2,1)^{\mathsf{T}}, (-3,1,0,0)^{\mathsf{T}}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$.

Věta: Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ libovolné $\boldsymbol{u} \in R_{\boldsymbol{A}}$ a $\boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{A}$ splňují $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, čili $\ker \boldsymbol{A} = (R_{\boldsymbol{A}})^{\perp}$.

Ukázka: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 = (1,3,4,5)^{\mathsf{T}} - 2(0,0,1,-2)^{\mathsf{T}} = (1,3,2,9)^{\mathsf{T}}$
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}_1 + 3\boldsymbol{c}_2 = (-13,0,2,1)^{\mathsf{T}} + 3(-3,1,0,0)^{\mathsf{T}} = (-22,3,2,1)^{\mathsf{T}}$

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 1 \cdot (-22) + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle &= \langle \boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{c}_1 + 3\boldsymbol{c}_2 \rangle = \\ &= \langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{c}_1 \rangle + 3\langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{c}_2 \rangle - 2\langle \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{c}_1 \rangle - 6\langle \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{c}_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Doplňky prostorů určených reálnou maticí

Ukázka:
Pro reálnou matici $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 15 & 9 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proto $R_{\boldsymbol{A}} = \operatorname{span}\{(1,3,4,5)^{\mathsf{T}}, (0,0,1,-2)^{\mathsf{T}}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$,
a také $\ker \boldsymbol{A} = \operatorname{span}\{(-13,0,2,1)^{\mathsf{T}}, (-3,1,0,0)^{\mathsf{T}}\} = \operatorname{span}\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$.

Věta: Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ libovolné $\boldsymbol{u} \in R_{\boldsymbol{A}}$ a $\boldsymbol{v} \in \ker \boldsymbol{A}$ splňují $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, čili $\ker \boldsymbol{A} = (R_{\boldsymbol{A}})^{\perp}$.

Důkaz: Označme $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$. Nechť $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_{n-r}$ je báze $\ker \boldsymbol{A}$.
Búno, nechť prvních r řádků $\boldsymbol{A}$ tvoří bázi $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ prostoru $R_{\boldsymbol{A}}$.
Pro každé $\boldsymbol{b}_i$ a $\boldsymbol{c}_j$ platí $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{c}_j$, protože $\langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{c}_j \rangle = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{c})_i = \mathbf{0}_i = 0$.

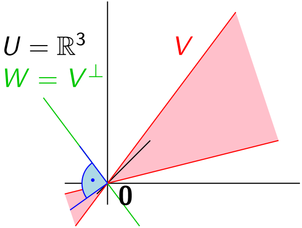
Potom libovolné vektory $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{r} a_i \boldsymbol{b}_i$ a $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{c}_j$ splňují:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \boldsymbol{b}_i \middle| \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{c}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-r} a_i d_j \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{c}_j \rangle = 0$$

Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta: Pro prostor U se skalárním součinem a konečné dimenze a jeho podprostor V platí: $(V^{\perp})^{\perp} = V$ a $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim U$.

Ukázky:



$\dim V + \dim W = 2 + 1 = 3 = \dim U$

Pro homogenní soustavu $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ s maticí $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
lze vzít prostory $U = \mathbb{R}^n$ a $V = R_{\boldsymbol{A}}$. Potom $V^{\perp} = \ker \boldsymbol{A}$
a platí $\dim V + \dim V^{\perp} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + (n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}) = n = \dim U$.

Vlastnosti ortogonálního doplňku

Věta: Pro prostor U se skalárním součinem a konečné dimenze a jeho podprostor V platí: $(V^{\perp})^{\perp} = V$ a $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim U$.

Důkaz: Zvolíme nějakou ortonormální bázi B prostoru V a doplníme ji na ortonormální bázi H prostoru U.
Označme $C = H \setminus B$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k)$, $C = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l)$.

Každé $\boldsymbol{u} \in \operatorname{span}(B) = V$ je kolmé ke každému $\boldsymbol{v} \in \operatorname{span} C$:

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{b}_i \Big| \sum_{j=1}^{l} d_j \boldsymbol{c}_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \overline{d_j} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{c}_j \rangle = 0,$$

protože H je ortonormální báze. Jinak zapsáno: $\operatorname{span} C \subseteq V^{\perp}$.

Nyní vezměme $\boldsymbol{w} \in V^{\perp}$ a uvažme $[\boldsymbol{w}]_H$. Báze je H ortonormální, a tak koeficienty $\boldsymbol{w}$ vzhledem k H jsou Fourierovy koeficienty dané skalárním součinem vektoru $\boldsymbol{w}$ s prvky báze H.
Protože $\boldsymbol{w} \in V^{\perp}$, pro každé $\boldsymbol{b}_i \in B : \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{b}_i \rangle = 0$, čili $\boldsymbol{w} \in \operatorname{span} C$.
V důsledku platí: $V^{\perp} \subseteq \operatorname{span} C$ a následně i: $V^{\perp} = \operatorname{span} C$.

Nyní: $\dim V + \dim V^{\perp} = |B| + |C| = |H| = \dim U$
a také: $(V^{\perp})^{\perp} = \operatorname{span}(H \setminus C) = \operatorname{span} B = V$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež ? Ortogonální doplněk U v U je $\emptyset$.
2. Pokud reálné matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ splňují $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, potom vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu platí:

   a) $R_{\boldsymbol{A}} \subseteq (R_{\boldsymbol{B}})^\perp$, b) $R_{\boldsymbol{A}} = (R_{\boldsymbol{B}})^\perp$, c) $R_{\boldsymbol{A}} \supseteq (R_{\boldsymbol{B}})^\perp$,
   d) $R_{\boldsymbol{A}} \subseteq (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$, e) $R_{\boldsymbol{A}} = (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$, f) $R_{\boldsymbol{A}} \supseteq (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$,
   g) $S_{\boldsymbol{A}} \subseteq (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$, h) $S_{\boldsymbol{A}} = (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$, i) $S_{\boldsymbol{A}} \supseteq (S_{\boldsymbol{B}})^\perp$.
3. Je-li V podmnožina prostoru U se skalárním součinem konečné dimenze, pak mezi V a $(V^\perp)^\perp$ platí vztah:
   a) $=$, b) $\subset$, c) $\subseteq$, d) $\supset$, e) $\supseteq$, f) žádný z uvedených.
4. Ortogonální doplněk podprostoru V nekonečné dimenze v prostoru U stejné nekonečné dimenze: a) má vždy konečnou dimenzi, b) má vždy nekonečnou dimenzi, c) může mít v některých případech konečnou a jindy i nekonečnou dimenzi.

Komentář k řešení kvízu

1. Zde pro volbu $V = U$ dostáváme $V^{\perp} = U^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.
2. Je-li $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ pak: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n \times m} \Rightarrow \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$.
   Jen sloupcové prostory matic mohou mít stejnou dimenzi.
   Pro $\boldsymbol{u} \in S_{\boldsymbol{A}}$ a $\boldsymbol{v} \in S_{\boldsymbol{B}}$ platí: $\boldsymbol{u}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0$ čili $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$. Pak $\boldsymbol{u} \in (S_{\boldsymbol{B}})^{\perp} \Rightarrow S_{\boldsymbol{A}} \subseteq (S_{\boldsymbol{B}})^{\perp}$. (Též $\boldsymbol{v} \in (S_{\boldsymbol{A}})^{\perp} \Rightarrow S_{\boldsymbol{B}} \subseteq (S_{\boldsymbol{A}})^{\perp}$.)
3. Pro $W = \operatorname{span} V$ je
   $V^{\perp} = W^{\perp} \Rightarrow V \subseteq W = (W^{\perp})^{\perp} = (V^{\perp})^{\perp}$.
4. Možnost b) vylučuje $V = U$, neboť $\dim V^{\perp} = \dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.
   Pro prostor funkcí U na $(-\pi, \pi)$ se standardním skalárním součinem generovaný $\{\sin(ix), \cos(jx) \colon i, j \in \mathbb{N}\}$ a $V = \operatorname{span}(\{\sin(ix) \colon i \in \mathbb{N}\})$ je $V^{\perp} = \operatorname{span}(\{\cos(jx) \colon j \in \mathbb{N}\})$.
   Dimenze prostorů U, V i $V^{\perp}$ je nekonečná, což vylučuje a).

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je-li V podprostor, kterou z inkluzí mezi V a $(V^{\perp})^{\perp}$ lze dokázat elementárně i v prostorech nekonečných dimenzí? Který krok nelze dost dobře provést v analogickém pokusu o důkaz opačné inkluze?