Ortogonální projekce

Definice: Nechť U je prostor se skalárním součinem a V je jeho *podprostor* s ortonormální bazí $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$.
Zobrazení $p_B : U \to V$ definované $p_B(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i$
je *ortogonální projekce* U na V.

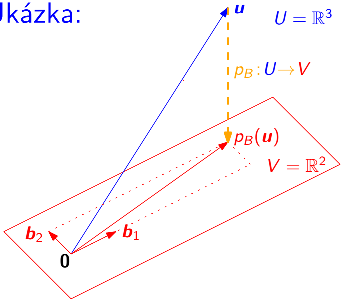
Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

Důkaz:

$$p_B(t\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle t\boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i = t \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i = t p_B(\boldsymbol{u})$$

$$p_B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i + \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i = p_B(\boldsymbol{u}) + p_B(\boldsymbol{v})$$

Ukázka:



Ortogonální projekce

Definice: Nechť U je prostor se skalárním součinem a V je jeho *podprostor* s ortonormální bazí $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$.
Zobrazení $p_B : U \to V$ definované $p_B(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i$ je *ortogonální projekce* U na V.

Pozorování: Ortogonální projekce je lineární zobrazení.

Lemma: Nechť p_B je ortogonální projekce U na V, potom $\boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u}) \perp \boldsymbol{b}_i$ pro každé $\boldsymbol{b}_i \in B$.

Důkaz:

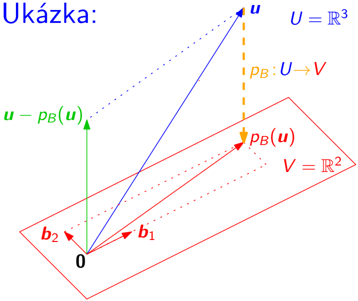
$\langle \boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{b}_i \rangle =$

$\left\langle \boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_j \rangle \boldsymbol{b}_j \middle| \boldsymbol{b}_i \right\rangle =$

$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_j \rangle \langle \boldsymbol{b}_j | \boldsymbol{b}_i \rangle =$

$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle = 0$

Ukázka:

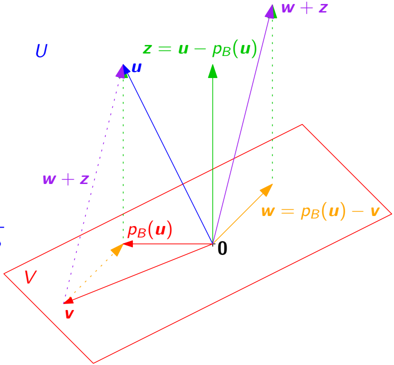


Projekce a vzdálenost

Tvrzení: Vektor $p_B(\boldsymbol{u})$ je vektor z $V = \text{span}(B)$, který je nejbližší k $\boldsymbol{u}$ v tom smyslu, že minimalizuje $||\boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u})||$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \neq p_B(\boldsymbol{u})$
vezměme $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u})$,
$\boldsymbol{w} = p_B(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$.
Protože $\boldsymbol{w} \in V$, máme $\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{z} \rangle = 0$.

Nyní: $||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{w} + \boldsymbol{z}||$
$= \sqrt{\langle \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z} | \boldsymbol{w} + \boldsymbol{z} \rangle}$
$= \sqrt{\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{z} | \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{z} | \boldsymbol{z} \rangle}$
$= \sqrt{\langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{z} | \boldsymbol{z} \rangle}$
$> \sqrt{\langle \boldsymbol{z} | \boldsymbol{z} \rangle}$
$= ||\boldsymbol{z}|| = ||\boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u})||$



Důsledek: Zobrazení p_B nezávisí na volbě báze B.

Přibližné řešení neřešitelných soustav v oborech $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

Pozorování: Vektor $p_B(\boldsymbol{u})$ je vektor z $V = \mathrm{span}(B)$, který je nejbližší k $\boldsymbol{u}$ v tom smyslu, že minimalizuje $||\boldsymbol{u} - p_B(\boldsymbol{u})||$.

Pokud soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, tj. když $\boldsymbol{b} \notin S_{\boldsymbol{A}}$, pak můžeme promítnout $\boldsymbol{b}$ do $S_{\boldsymbol{A}}$ a získat $\boldsymbol{b}'$.

Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}'$ má nyní řešení. V důsledku pozorování takové $\boldsymbol{x}$ minimalizuje chybu $||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'|| = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}||$.

To je princip tzv. *metody nejmenších čtverců*.

Možnosti výpočtu:

- Ortonormalizovat bázi $S_{\boldsymbol{A}}$ a projekcí $\boldsymbol{b}$ získat $\boldsymbol{b}'$, nebo
- namísto $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}'$ vyřešit ekvivalentní $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}$.

Důkaz: $\boldsymbol{b}'$ je projekcí $\boldsymbol{b}$ do $S_{\boldsymbol{A}}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'$ je kolmý na sloupce $\boldsymbol{A}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}' \in \ker(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}') = \boldsymbol{0}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Ax}$

Ukázka metody nejmenších čtverců

Nalezněte rovnici roviny ρ v $\mathbb{R}^3$ ve tvaru $z = px + qy + r$ takové, že její poloha minimalizuje součet svislých vzdáleností mezi ρ a body $(1,4,4\frac{1}{2})^\mathsf{T}, (1,2,2\frac{2}{3})^\mathsf{T}, (3,5,2\frac{2}{3})^\mathsf{T}, (3,1,2)^\mathsf{T}$ a $(5,4,2)^\mathsf{T}$.

Koeficienty p, q a r jsou přibližným řešením soustavy s maticí:

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 4\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 2\frac{2}{3} \\ 3 & 5 & 1 & 2\frac{2}{3} \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

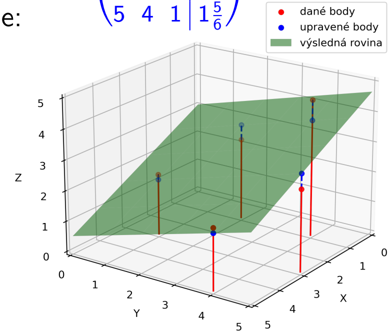
Upravená soustava s projekcí $\boldsymbol{b}'$ vektoru pravých stran $\boldsymbol{b}$ do sloupcového prostoru $\boldsymbol{A}$ je:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3\frac{5}{6} \\ 1 & 2 & 1 & 3\frac{1}{6} \\ 3 & 5 & 1 & 3\frac{1}{6} \\ 3 & 1 & 1 & 1\frac{5}{6} \\ 5 & 4 & 1 & 1\frac{5}{6} \end{array}\right) = (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}')$$

Řešení upravené soustavy dává rovinu: $\rho : z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 3$.

Řešení lze také určit z rovnice: $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}) \cdot (p,q,r)^\mathsf{T} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{b}$, čili:

$$\begin{pmatrix} 45 & 44 & 13 \\ 44 & 62 & 16 \\ 13 & 16 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31\frac{1}{6} \\ 46\frac{2}{3} \\ 13\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$



Gramova-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

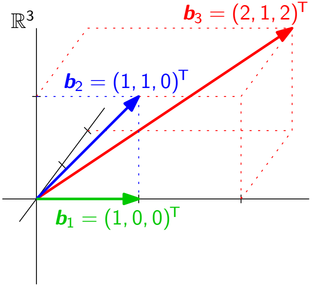
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \dots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \dots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



Idea: Pomocí odečtení projekcí nejprve zajistíme kolmost,

poté skalárním násobkem upravíme délku — normu.

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

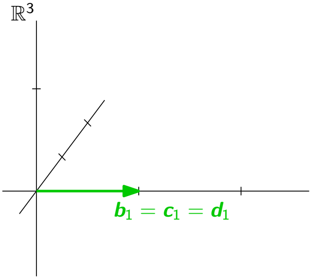
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



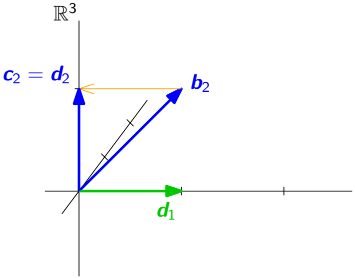
$i = 1:$

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1 - \sum_{j=1}^{0} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j = \boldsymbol{b}_1 = (1, 0, 0)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{d}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_1||} \boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{1}(1, 0, 0)^\mathsf{T} = (1, 0, 0)^\mathsf{T}$$

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.



for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end

$i = 2$:

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{d}_1 \rangle \boldsymbol{d}_1 = (1,1,0)^\mathsf{T} - 1 \cdot (1,0,0)^\mathsf{T} = (0,1,0)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_2||} \boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{1} (0,1,0)^\mathsf{T} = (0,1,0)^\mathsf{T}$$

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — ukázka

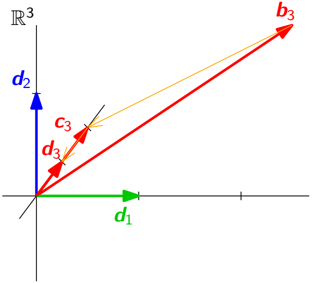
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



$i = 3$:

$$\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_1 \rangle \boldsymbol{d}_1 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_2 \rangle \boldsymbol{d}_2 =$$
$$= (2, 1, 2)^\mathsf{T} - 2 \cdot (1, 0, 0)^\mathsf{T} - 1 \cdot (0, 1, 0)^\mathsf{T} = (0, 0, 2)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{d}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_3||} \boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{2}(0, 0, 2)^\mathsf{T} = (0, 0, 1)^\mathsf{T}$$

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

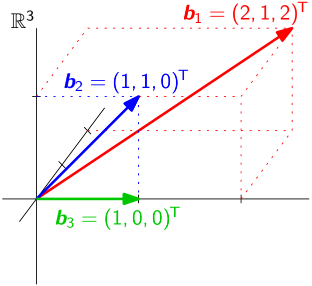
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



Gramova-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

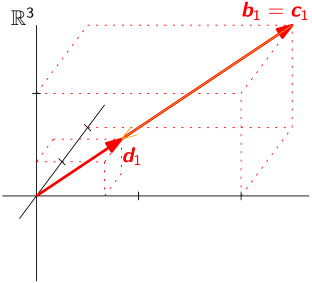
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



$i = 1$:

$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1 = (2, 1, 2)^{\mathsf{T}}$

$\boldsymbol{d}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_1||} \boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^{\mathsf{T}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}}$

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

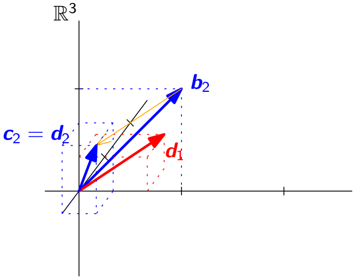
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



$i = 2:$

$$\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 - \langle \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{d}_1 \rangle \boldsymbol{d}_1 = (1, 1, 0)^\mathsf{T} - 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)^\mathsf{T} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_2||} \boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{1} \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$$

Gramova-Schmidtova ortonormalizace — jiné pořadí

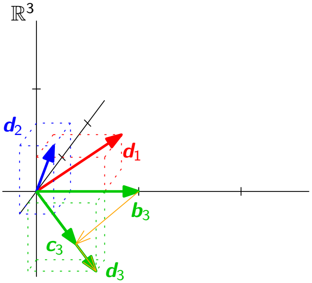
Algoritmus, který převede libovolnou bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem na ortonormální bázi $(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_n)$.

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$$

$$\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$$

end



$i = 3:$

$$\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_1 \rangle \boldsymbol{d}_1 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_2 \rangle \boldsymbol{d}_2 =$$
$$= (1, 0, 0)^\mathsf{T} - \tfrac{2}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)^\mathsf{T} - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)^\mathsf{T} = \left(\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{2}{9}\right)^\mathsf{T}$$

$$\boldsymbol{d}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_3||} \boldsymbol{c}_3 = \frac{1}{2/3} \left(\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{2}{9}\right)^\mathsf{T} = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)^\mathsf{T}$$

Korektnost Gramovy-Schmidtovy ortonormalizace

for $i = 1, \ldots, n$ **do**

1. $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$
2. $\boldsymbol{d}_i = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i$

end

- Díky lemmatu o odečtení projekcí platí pro 1.:
  $\boldsymbol{c}_i \perp \boldsymbol{d}_j$ pro každé $j < i$, odtud $\boldsymbol{d}_i \perp \boldsymbol{d}_j$ pro $j \neq i$.
- Díky linearitě normy 2.: $||\boldsymbol{d}_i|| = \left|\left| \frac{1}{||\boldsymbol{c}_i||} \boldsymbol{c}_i \right|\right| = \frac{||\boldsymbol{c}_i||}{||\boldsymbol{c}_i||} = 1$.
- Díky lemmatu o výměně: $\mathrm{span}(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{b}_i) = \mathrm{span}(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{c}_i) = \mathrm{span}(\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_{i-1}, \boldsymbol{d}_i)$.

Důsledek: Je-li V je podprostor prostoru U se skalárním součinem,
pak každou ortonormální bázi podprostoru V
lze rozšířit na ortonormální bázi prostoru U.

Ortonormalizace z pohledu řádkových úprav

Pro bázi $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = ((2,1,2)^\mathsf{T}, (1,1,0)^\mathsf{T}, (1,0,0)^\mathsf{T})$ máme:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{b}_i$ je vždy upraven pomocí předchozích vektorů, a tak každá matice úprav je *dolní trojúhelníková* (nebo dokonce diagonální).

Např. vztahy $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_1 \rangle \boldsymbol{d}_1 - \langle \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{d}_2 \rangle \boldsymbol{d}_2$ a $\boldsymbol{d}_3 = \frac{1}{||\boldsymbol{c}_3||} \boldsymbol{c}_3$ čili $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3 - \frac{2}{3} \boldsymbol{d}_1 - \frac{1}{3} \boldsymbol{d}_2$ a $\boldsymbol{d}_3 = \frac{1}{2/3} \boldsymbol{c}_3$ odpovídají maticovým součinům:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Důsledek: Pro každou komplexní regulární matici $\boldsymbol{A}$ existují dolní trojúhelníková matice $\boldsymbol{L}$ a unitární matice $\boldsymbol{Q}$ takové, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LQ}$.

Důkaz: Dolní trojúhelníkové jsou uzavřené na součiny; $\boldsymbol{A}$ s řádky z báze B je regulární; $\boldsymbol{Q}$ z výsledné ortonormální báze je unitární.

Věta: Každá komplexní regulární $\boldsymbol{A}$ má tzv. *QR rozklad* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q'R}$ s unitární $\boldsymbol{Q'}$ a horní trojúhelníkovou $\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{A}^\mathsf{T} = \boldsymbol{LQ} \Rightarrow \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{LQ})^\mathsf{T} = \boldsymbol{Q'R}$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Ortogonální projekce dvou navzájem kolmých vektorů dává kolmé vektory: a) vždy b) jen někdy c) nikdy d) jen v aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$, jinak nikdy
2. Pravda nebo lež? V množině vektorů získanou Gramovou-Schmidtovou ortonormalizací je vždy jen jeden vektor, který je skalárním násobkem některého z původních vektorů.
3. Jaká je časová složitost Gramovy-Schmidtovy ortonormalizace v prostoru $\mathbb{C}^n$ se součinem $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}$?
   a) $o(n^2)$, b) $O(n^2)$, c) $O(n^2 \log n)$, d) $O(n^3)$, e) $O(n^3 \log n)$, f) $O(n^4)$, g) $O(n^4 \log n)$, h) $O(n^5)$, i) $O(n^5 \log n)$, j) $\Omega(n^6)$.
4. Dá-li Gramova-Schmidtova ortonormalizace pro každé pořadí vektorů báze B vždy stejnou neuspořádanou bázi D, pak a) $\dim(V) = 1$, b) B je ortonormální báze prostoru V, c) vektory B jsou vzájemně kolmé, d) $0 = 1$ (taková B není).

Komentář k řešení kvízu

1. Např. v $\mathbb{R}^3 : (1, 1, 0)^\mathsf{T} \perp (1, -1, 0)^\mathsf{T}$. Projekcí do podprostoru $\{(u_1, u_2, 0) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$ se vektory nezmění. Projekce obou do $\{(u_1, 0, 0) : u_2 \in \mathbb{R}\}$ je $\mathbf{e}_1$ a ten sám na sebe kolmý není.
2. Např. pokud $\boldsymbol{b}_1 \perp \boldsymbol{b}_2$, pak $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2$ a i $\boldsymbol{d}_2$ je násobkem $\boldsymbol{b}_2$.
3. Výpočet součinu $\langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle$ má složitost $O(n^2)$, ale i $\langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{d}_j \rangle \boldsymbol{d}_j$ protože skalární násobek vyžaduje jen $O(n)$ operací navíc. Výpočet projekce má složitost $O(n^3)$, což opakujeme $n\times$. Z horní meze f) vyplývají i g-i) podle definice O-notace.
4. Např. v $\mathbb{R}^2$ u vektorů $\{\mathbf{e}_1, (0, 2)^\mathsf{T}\}$ dá Gramova-Schmidtova ortonormalizace vždy standardní bázi, což vylučuje a,b,d). Pokud B obsahuje vektory $\boldsymbol{b} \not\perp \boldsymbol{b}'$, potom pořadí začínající $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}', \ldots$ a $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}, \ldots$ vedou na odlišné ortonormální báze.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jaké lineární kombinace jsou použity coby předpoklad lemmatu o výměně v důkazu korektnosti?
- Postačí jen vynechat druhý krok Gramovy-Schmidtovy ortonormalizace, abychom dostali sadu vzájemně kolmých vektorů, nebo jsou potřeba další úpravy algoritmu?
- Má každá komplexní matice jednoznačný QR-rozklad? Pokud ne, jak by bylo možné získat další QR-rozklady?
- Pokud bychom v ukázce metody nejmenších čtverců hledali koeficienty rovnice roviny ρ ve tvaru $px + qy + rz + s = 0$, k jakým závěrům bychom došli? (Jinými slovy, kdybychom hledali $p, q, r, s \in \mathbb{R}$, aby podmínka $(1, 4, 4\frac{1}{2}) \in \rho$ odpovídala rovnici $1p + 4q + 4\frac{1}{2}r + s = 0$, atd. pro ostatní body.)

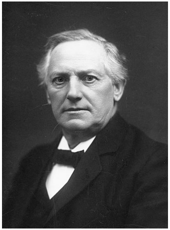
Poznámky k pojmosloví a značení

Ortogonální projekce se někdy nazývá *kolmá*, zvlášť v geometrii.

Horní trojúhelníková matice z QR-rozkladu se často značí $\boldsymbol{R}$ z angl. “*right*”, někdy též $\boldsymbol{U}$. Ustálené značení unitární matice $\boldsymbol{Q}$ pochází od J. G. F. Francise (1961).[1]

Algoritmus ortonormalizace je nazván podle dánského matematika J. P. Grama a německého matematika E. Schmidta.

Princip byl však znám už o století dříve P. S. Laplaceovi i A. L. Cauchymu.



Jørgen Pedersen Gram
1850 – 1916

Erhard Schmidt
1876 – 1959

Mezi první užití metody nejmenších čtverců patří předpověď dráhy planetky Ceres tehdy 24-letým C. F. Gaussem (1801).

[1] Citace: “. . . it is proved that the transformations can be unitary, and QR transformation, as I have (somewhat arbitrarily) named this modification . . . ”