Kolmost

Definice: Vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ z prostoru se skalárním součinem jsou *kolmé*, pokud $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Kolmé vektory značíme $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Pozorování: Množina netriviálních vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou kolmé a $\boldsymbol{v}_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i$.

Pak:

$$\langle \boldsymbol{v}_0 | \boldsymbol{v}_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \middle| \boldsymbol{v}_0 \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle \boldsymbol{v}_i | \boldsymbol{v}_0 \rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 0 = 0 \Rightarrow v_0 = \mathbf{0}$$

Definice: Bázi $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ prostoru V se skalárním součinem nazveme *ortonormální*, pokud platí $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$, pro každé $i \neq j$, a také $||\boldsymbol{b}_i|| = 1$ pro každé $\boldsymbol{b}_i \in B$.

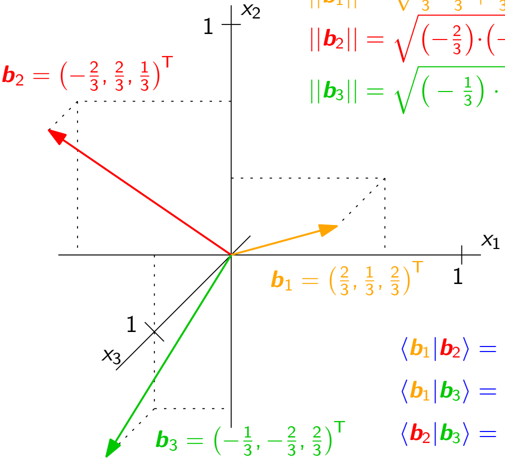
Pozorování: Matice, jejíž sloupce tvoří vektory ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ vzhledem ke standarnímu skalárnímu součinu splňují: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A} = \mathbf{I}_n$. Matice s touto vlastností se nazývají *unitární*.

Ukázka — ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$

$$\|\boldsymbol{b}_1\| = \sqrt{\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}} = 1$$

$$\|\boldsymbol{b}_2\| = \sqrt{\left(-\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}} = 1$$

$$\|\boldsymbol{b}_3\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}} = 1$$



$$\langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{b}_2 \rangle = \tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = 0$$

$$\langle \boldsymbol{b}_1 | \boldsymbol{b}_3 \rangle = \tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = 0$$

$$\langle \boldsymbol{b}_2 | \boldsymbol{b}_3 \rangle = \left(-\tfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = 0$$

Ukázky — ortonormální báze pro reálné funkce

Pro standardní skalární součin $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ obvyklá báze $(1, x, x^2)$ *není* ortonormální bazí prostoru reálných polynomů stupně nejvýše dva na intervalu $(0, 1)$:

$$||1|| = \sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\,\mathrm{d}x} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

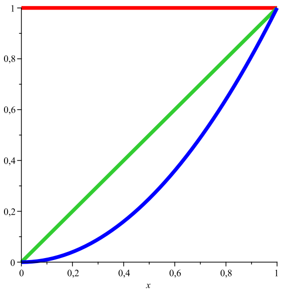
$$||x|| = \sqrt{\int_0^1 x\cdot x\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1} = \tfrac{\sqrt{3}}{3} \neq 1$$

$$||x^2|| = \sqrt{\int_0^1 x^2\cdot x^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1} = \tfrac{\sqrt{5}}{5} \neq 1$$

$$\langle 1|x\rangle = \int_0^1 1\cdot x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} \neq 0$$

$$\langle 1|x^2\rangle = \int_0^1 1\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3} \neq 0$$

$$\langle x|x^2\rangle = \int_0^1 x\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} \neq 0$$



Je třeba vzít jinou bázi, např.
$\left(1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\right)$:

$$||1|| = \sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\,\mathrm{d}x} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$$

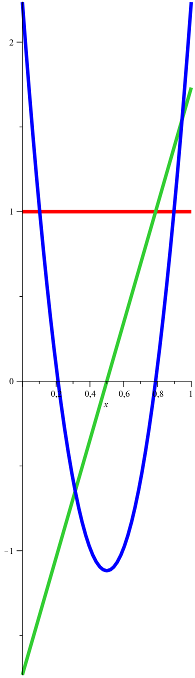
$$||\sqrt{3}(2x-1)|| = \sqrt{\int_0^1 3(4x^2-4x+1)\,\mathrm{d}x} =$$
$$= \sqrt{3\left[\tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_0^1} = 1$$

$$||\sqrt{5}(6x^2-6x+1)|| =$$
$$= \sqrt{\int_0^1 5(36x^4 - 72x^3 + 48x^2 - 12x + 1)\,\mathrm{d}x} =$$
$$= \sqrt{5\left[\tfrac{36}{5}x^5 - 18x^4 + 16x^3 - 6x^2 + x\right]_0^1} = 1$$

$$\langle 1|\sqrt{3}(2x-1)\rangle = \int_0^1 \sqrt{3}(2x-1)\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}[x^2-x]_0^1 = 0$$

$$\langle 1|\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\rangle = \int_0^1 \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sqrt{5}[2x^3-3x^2+x]_0^1 = 0$$

$$\langle \sqrt{3}(2x-1)|\sqrt{5}(6x^2-6x+1)\rangle =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{15}(12x^3-18x^2+8x-1)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sqrt{15}[3x^4-6x^3+4x^2-x]_0^1 = 0$$



Ortonormální systém periodických funkcí

Funkce $\sin(ix)$ a $\cos(jx)$ jsou kolmé na $(-\pi,\pi)$, pro $i,j\in\mathbb{N}$.

$\langle\sin(ix)|\sin(jx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(\cos((i-j)x)-\cos((i+j)x)\big)\,\mathrm{d}x =$

$\quad = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{i-j}\sin((i-j)x)-\frac{1}{i+j}\sin((i+j)x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad$ pro $i\neq j$

$\langle\cos(ix)|\cos(jx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(\cos((i-j)x)+\cos((i+j)x)\big)\,\mathrm{d}x =$

$\quad = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{i-j}\sin((i-j)x)+\frac{1}{i+j}\sin((i+j)x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad$ pro $i\neq j$

$\langle\sin(ix)|\cos(jx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(ix)\cos(jx)\,\mathrm{d}x = 0$

Použijeme skutečnost, že $\sin(k\pi)=0$ pro celé číslo k.
V posledním případě integrujeme lichou funkci na symetrickém intervalu.

$||\sin(ix)||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(1-\cos(2ix)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2i}\sin(2ix)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

$||\cos(ix)||^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\big(1+\cos(2ix)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2i}\sin(2ix)\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi$

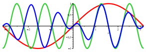
…po normalizaci pomocí $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ bychom dostali ortonormální systém.

Používáme součtové vzorce:

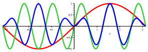
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big)$



$\sin(x)\perp\cos(5x)$



$\sin(x)\perp\sin(5x)$

Vlastnosti ortonormální báze

Tvrzení: Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru V.
Pro každé $\boldsymbol{v} \in V$ platí: $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_n \rangle \boldsymbol{b}_n$.

Koeficienty $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_i \rangle$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*.

Důkaz: $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i \middle| \boldsymbol{b}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{b}_j \rangle = a_j$

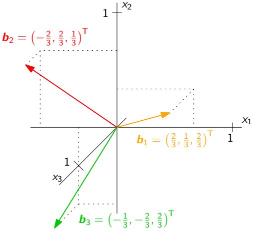
Souřadnice vektoru $\boldsymbol{v} = (3,3,3)^{\mathsf{T}}$ vzhledem k bázi $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ jsou:

$[\boldsymbol{v}]_B = \big(\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_3 \rangle\big)^{\mathsf{T}} = (5, 1, -1)^{\mathsf{T}}$

$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_1 \rangle = 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = 5$

$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_2 \rangle = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_3 \rangle = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$



Zkouška: $5 \cdot \boldsymbol{b}_1 + 1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + (-1) \cdot \boldsymbol{b}_3 =$

$= 5 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}} + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^{\mathsf{T}} = (3,3,3)^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{v}$

Vlastnosti ortonormální báze

Tvrzení: Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je ortonormální báze prostoru V.
Pro každé $\boldsymbol{v} \in V$ platí: $\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_1 \rangle \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_n \rangle \boldsymbol{b}_n$.

Koeficienty $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_i \rangle$ se nazývají *Fourierovy koeficienty*.

Důkaz: $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i \Rightarrow \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i \middle| \boldsymbol{b}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{b}_j \rangle = a_j$

Věta: Nechť B je ortonormální báze prostoru V se skalárním součinem. Pro každé $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ platí: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathrm{H}} [\boldsymbol{u}]_B$.

Důkaz: Víme, že: $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_j \rangle \boldsymbol{v}_j$.

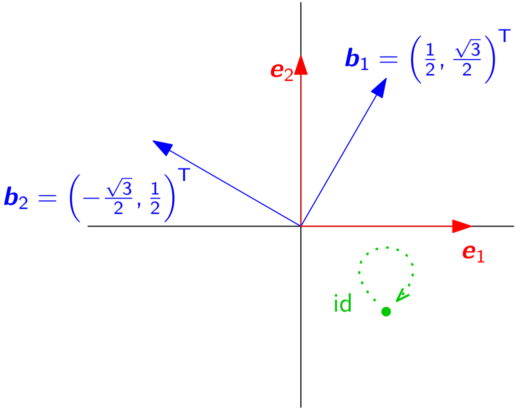
Pak $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \boldsymbol{b}_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_j \rangle \boldsymbol{b}_j \right\rangle =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \overline{\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_j \rangle} \langle \boldsymbol{b}_i | \boldsymbol{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{b}_i \rangle \overline{\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{b}_i \rangle} = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathrm{H}} [\boldsymbol{u}]_B$$

Lineární zobrazení, která zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, zachovává-li skalární součin, tj. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$.

Ukázka: Identita zachovává vektory, tedy i skalární součin.

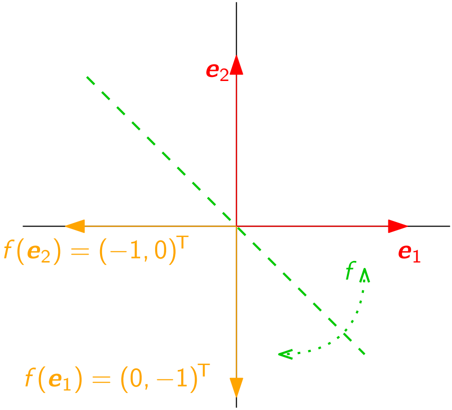


$$[\mathrm{id}]_{B,K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení, která zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, zachovává-li skalární součin, tj. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$.

Ukázka: Osová souměrnost zachovává skalární součin.



$$[f]_{K,K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení, která zachovávají skalární součin

Definice: Lineární zobrazení f mezi prostory V a W je *isometrie*, zachovává-li skalární součin, tj. $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$.

Věta: Lineární zobrazení mezi prostory V a W je isometrie, *právě když* zachovává příslušnou normu: $\forall \boldsymbol{u} \in V : ||\boldsymbol{u}|| = ||f(\boldsymbol{u})||$.

Důkaz: Protože norma závisí na skalárním součinu, máme $\Rightarrow$.

Pro $\Leftarrow$ porovnejme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
||\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}||^2 & = & ||\boldsymbol{u}||^2 & + & t\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle & + & \bar{t}\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle & + & t\bar{t}||\boldsymbol{v}||^2 \\
\shortparallel & & \shortparallel & & & & & & \shortparallel \\
||f(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v})||^2 & = & ||f(\boldsymbol{u})||^2 & + & t\langle f(\boldsymbol{v}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle & + & \bar{t}\langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle & + & t\bar{t}||f(\boldsymbol{v})||^2
\end{array}$$

pro $t = 1$ máme: $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle + \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$

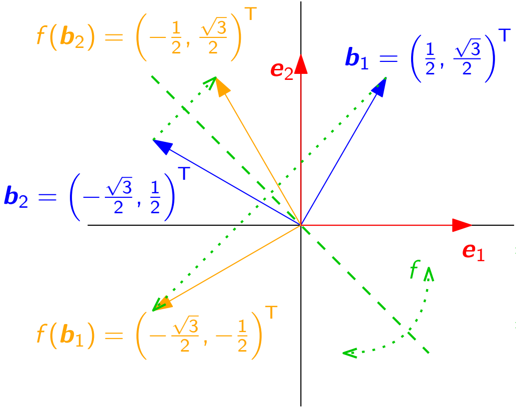
pro $t = \mathrm{i}$ máme: $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle - \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{v}) | f(\boldsymbol{u}) \rangle - \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$

$$\Rightarrow \ \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle$$

Maticová charakterizace bijektivních isometrií

Věta: Nechť V a W jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze a B, C jsou jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f: V \to W$ je bijektivní isometrie, právě když $[f]_{B,C}$ je unitární.

Ukázka:



$$[f]_{B,K} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= [f]_{K,K}[\mathrm{id}]_{B,K}$$

Všimněte si, že součin unitárních matic je unitární.

Maticová charakterizace bijektivních isometrií

Věta: Nechť V a W jsou prostory se skalárním součinem konečné dimenze a B, C jsou jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je bijektivní isometrie, právě když $[f]_{B,C}$ je unitární.

Důkaz: Lineární bijekce implikuje regularitu $[f]_{B,C}$ a naopak.

Protože B je ortonormální: $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{H}} [\boldsymbol{u}]_B$

Protože C je ortonormální: $\langle f(\boldsymbol{u}) | f(\boldsymbol{v}) \rangle = [f(\boldsymbol{v})]_C^{\mathsf{H}} [f(\boldsymbol{u})]_C$

$$= [\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{H}} [f]_{B,C}^{\mathsf{H}} [f]_{B,C} [\boldsymbol{u}]_B$$

Všimněte si, že maticová rovnost $\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}$ platí pro všechny vhodné vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ pouze v případě, je-li $\boldsymbol{A}$ jednotková matice.

V našem případě je f isometrie pokud

$[\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{H}} [\boldsymbol{u}]_B = [\boldsymbol{v}]_B^{\mathsf{H}} [f]_{B,C}^{\mathsf{H}} [f]_{B,C} [\boldsymbol{u}]_B$ platí pro všechna $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$,

což platí právě když $[f]_{B,C}^{\mathsf{H}} [f]_{B,C} = \mathbf{I}$, neboli je-li $[f]_{B,C}$ unitární.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež? Je-li V prostor se skalárním součinem, pak nulový vektor $\mathbf{0} \in V$ je kolmý ke všem vektorům z V.
2. Která z následujících pravidel jsou pravdivá?
   a) $(\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \vee \boldsymbol{v} = \mathbf{0}) \Rightarrow \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0$
   b) $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \vee \boldsymbol{v} = \mathbf{0})$
   c) $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{v} = \mathbf{0})$
3. Inverzní matice k unitární matici $\boldsymbol{A}$ je
   a) $\boldsymbol{A}$ b) $\boldsymbol{A}^{-1}$ c) $\boldsymbol{A}^2$ d) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$ e) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ f) nemusí existovat
4. Pravda nebo lež? Transpozice řádků unitární matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tvoří také ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$.
5. Ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$ tvoří sloupce libovolné matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, která je: a) jednotková b) čtvercová c) regulární d) permutační e) symetrická f) unitární

Komentář k řešení kvízu

1. Z definice $\langle \mathbf{0} | \boldsymbol{u} \rangle = \langle 0\boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle = 0 \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle = 0$
2. Vektory ortonormální báze vylučují možnosti b, c).
3. b, e) z definice; f) unitární jsou z definice regulární;

   a, c, d) protipříkladem je např. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.
4. Unitární matice jsou uzavřené na transpozici:
   $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{H}} \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$,
   protože z předpokladu $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} \boldsymbol{A} = \mathbf{I}$ plyne i $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$
5. a, d, f) z definice; protipříkladem pro b, c, e) je např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak lze provést výpočet souřadnic vůči bázi, jejíž vektory jsou vzájemné kolmé, ale nemusejí mít jednotkovou délku? (Taková báze se někdy nazývá *ortogonální*.)
- Jakými způsoby lze určit vektor souřadnic v aritmetickém vektorovém prostoru, je li dána (obyčejná) báze a je-li dána ortonormální báze? Jaká je složitost těchto výpočtů?
- Může pro libovolnou konečnou bázi prostoru nad $\mathbb{C}$ existovat skalární součin takový, že vůči němu je tato báze ortonormální? Pokud ano, byl by takový skalární součin určen jednoznačně nebo by jich mohlo být i víc?
- Jaká je souvislost mezi kolmostí a kompresí obrázků ve formátu jpeg?

Poznámky k pojmosloví a značení

Kolmé vektory svírají v geometrii pravý úhel,
neboli jsou vzájemně *ortogonální* (doslova „pravoúhlé“).

Pozor, termín *ortogonální matice* označuje reálné matice $\boldsymbol{A}$, které splňují $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} = \mathbf{I}_n$. Jinými slovy, sloupce $\boldsymbol{A}$ tvoří orto**normální** bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.