Jordanova normální forma

Ukázka: Matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ není diagonalizovatelná v žádném oboru.

Důkaz: Má pouze jedno vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 2, a tak jediná diagonální matice, jíž by mohla být podobná je jen $\mathbf{I}_2$.

Ovšem pro každou regulární $\boldsymbol{R}$ platí: $\boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{I}_2\boldsymbol{R} = \mathbf{I}_2 \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jordanova normální forma

Ukázka: Matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ není diagonalizovatelná v žádném oboru.

Definice: *Jordanův blok* je čtvercová matice ve tvaru (prázdná místa vyplňují nuly)

$$\boldsymbol{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Věta: Každá čtvercová komplexní matice $\boldsymbol{A}$ je podobná blokové matici v takzvané *Jordanově normální formě*

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

Každý Jordanův blok $\boldsymbol{J}_{\lambda_i}$ odpovídá vlastnímu číslu λ_i matice $\boldsymbol{A}$. Více Jordanových bloků (i různých velikostí) může odpovídat λ_i.

Fakt: Pro každé λ je počet bloků a jejich velikosti jednoznačně určeny $\boldsymbol{A}$. Jordanova normální forma $\boldsymbol{A}$ je proto jedinečná až na pořadí Jordanových bloků na diagonále.

Pozorování: Diagonalizovatelná $\boldsymbol{A}$ má Jordanovy bloky 1×1.

Zobecněné vlastní vektory

Víme, že je-li $\boldsymbol{A}$ diagonalizovatelná, tj. $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RD}$,
pak sloupce $\boldsymbol{R}$ tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{A}$.

Co lze říci o maticích, které nejsou diagonalizovatelné?

Tvrzení: Nechť $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RJ}_\lambda$.

Označíme-li i-tý sloupec $\boldsymbol{R}$ jako $\boldsymbol{v}_i$, pak splňuje $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})^i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.

Důkaz:

$$
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & \lambda & 1 & & \\
 & \boldsymbol{RJ}_\lambda & & & & \lambda & \dots & 1 \\
 & & & & & & & \lambda \\
\hline
\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n & \lambda\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_{n-1} + \lambda\boldsymbol{v}_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclcl}
\boldsymbol{Av}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1 & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} & & \\
\boldsymbol{Av}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})^2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \\
 & \vdots & & & \\
\boldsymbol{Av}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} + \lambda\boldsymbol{v}_i & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1} & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})^i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \\
 & \vdots & & & \\
\boldsymbol{Av}_n = \boldsymbol{v}_{n-1} + \lambda\boldsymbol{v}_n & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_{n-1} & \Rightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})^n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}
\end{array}
$$

Zobecněné vlastní vektory

Víme, že je-li $\boldsymbol{A}$ diagonalizovatelná, tj. $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RD}$,
pak sloupce $\boldsymbol{R}$ tvoří vlastní vektory $\boldsymbol{A}$.
Co lze říci o maticích, které nejsou diagonalizovatelné?

Tvrzení: Nechť $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RJ}_\lambda$.
Označíme-li i-tý sloupec $\boldsymbol{R}$ jako $\boldsymbol{v}_i$, pak splňuje $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})^i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.

Definice: *Zobecněný vlastní vektor* matice $\boldsymbol{A}$ k vlastnímu číslu λ je libovolný vektor $\boldsymbol{v}$ splňující $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})^i \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Lze je řadit do *řetězců* $\boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \mathbf{0}$, kde $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1}$.

Totéž pro lineární zobrazení f odpovídá výrazu $f(\boldsymbol{v}_i) - \lambda \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{i-1}$.

V jiné notaci: $\boldsymbol{v} \in \ker((\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})^i)$, resp. $\boldsymbol{v} \in \ker((f - \lambda\, \mathrm{id})^i)$

Věta: (ekvivalentní formulace věty o Jordanově normální formě)
Je-li $f : V \to V$ lineární a V je konečné dimenze nad $\mathbb{C}$, pak má bázi B z řetězců zobecněných vlastních vektorů zobrazení f.

Poznámka: Platí i nad T, mají-li vlastní čísla v součtu algebraickou násobnost $\dim V$, t.j. lze-li $p_{[f]_{B,B}}(x)$ rozložit na lineární členy.

Ukázka

Matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ je podobná matici v Jordanově normálním tvaru se dvěma bloky $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, protože

$$\boldsymbol{AR} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{RJ}$$

$(3,2,1)^{\mathsf{T}}$ je vlastní vektor pro 2, čili $(\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3)(3,2,1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$ a
$(1,1,1)^{\mathsf{T}}$ je vlastní vektor pro 1, čili $(\boldsymbol{A} - 1\mathbf{I}_3)(1,1,1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$.

Prostřední sloupec matice $\boldsymbol{R}$ ovšem splňuje
$\boldsymbol{A} \cdot (2,2,1)^{\mathsf{T}} = (3,2,1)^{\mathsf{T}} + 2 \cdot (2,2,1)^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow$
$(\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3) \cdot (2,2,1)^{\mathsf{T}} = (3,2,1)^{\mathsf{T}} \quad \Rightarrow$
$(\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3)^2 \cdot (2,2,1)^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3) \cdot (3,2,1)^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}$.

Důkaz věty — 1. část

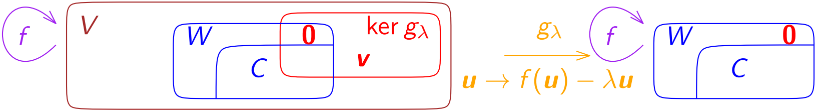
Indukcí podle $\dim V$. Pro každé vlastní číslo λ zavedeme zobrazení $g_\lambda : V \to V$ předpisem $g_\lambda(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) - \lambda\boldsymbol{u}$. Zobrazení g_λ jsou lineární, protože zachovávají součty i skalární násobky.

Zafixujme libovolné vlastní číslo λ a označme $W = g_\lambda(V) \subseteq V$. Z linearity g_λ dostáváme, že W je *podprostor* V.

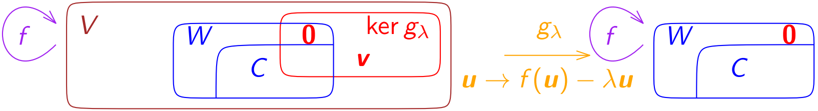
Dále $\dim W < \dim V$ protože vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ pro λ splňuje $g_\lambda(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, čili $\dim(\ker g_\lambda) \geq 1$ a z definice W platí $\dim V = \dim(g_\lambda(V)) + \dim(\ker g_\lambda) = \dim W + \dim(\ker g_\lambda)$.

Zobrazení f lze zúžit na W, neboť pro $g_\lambda(\boldsymbol{u}) \in W$ máme $f(g_\lambda(\boldsymbol{u})) = f(f(\boldsymbol{u}) - \lambda\boldsymbol{v}) = f(f(\boldsymbol{u})) - \lambda f(\boldsymbol{u}) = g_\lambda(f(\boldsymbol{u})) \in W$.

Dle indukčního předpokladu pro f a W má podprostor W bázi C z řetězců zobecněných vlastních vektorů zobrazení f.



Ukázka k 1. části důkazu



Pro $[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ a $\lambda = 2$ máme $[g_2]_{E,E} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Protože $[g_2]_{E,E} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, je $\dim(\ker g_2) = 1$, což odpovídá geometrické násobnosti vlastního čísla 2. Bázi $\ker g_2$ tvoří např. vlastní vektor $(3, 2, 1)^{\mathsf{T}}$. Dostáváme $\dim W = 3 - 1 = 2$.

Všimněme si, že $W \cap \ker g_2 \neq \emptyset$. Tento průnik má dimenzi 1.

Indukcí získáme řetězce tvořící bázi C podprostoru W:
první je $(3, 2, 1)^{\mathsf{T}}$ pro $\lambda = 2$ a druhý je $(1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$ pro $\lambda = 1$.
(Oba mají délku jedna, čili obsahují „pravé“ vlastní vektory.)

Důkaz věty — 2. část

Označme $d = \dim(\ker g_\lambda)$ a $d' = \dim(\ker(g_\lambda) \cap W)$

Bázi C rozdělíme do r řetězců délek $k_1, \ldots, k_r$ tak, že prvních d' přísluší λ a zbývající přísluší ostatním vlastním číslům $\lambda', \ldots, \lambda'^{\cdots\prime}$:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{c}^1_{k_1} & \xrightarrow{g_\lambda} & \cdots\cdots\cdots & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^1_2 & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^1_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{c}^2_{k_2} & \xrightarrow{g_\lambda} & \cdots & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^2_2 & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^2_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & \boldsymbol{c}^{d'}_{k_{d'}} & \xrightarrow{g_\lambda} & \cdots & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^{d'}_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
 & & \boldsymbol{c}^{d'+1}_{k_{d'+1}} & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \cdots & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \boldsymbol{c}^{d'+1}_1 & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & \boldsymbol{c}^{r}_{k_r} & \xrightarrow{g_{\lambda'^{\cdots\prime}}} & \cdots & \xrightarrow{g_{\lambda'^{\cdots\prime}}} & \boldsymbol{c}^{r}_1 & \xrightarrow{g_{\lambda'^{\cdots\prime}}} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Řetězce obsahují prvky z W, a tak každý z prvních d' řetězců lze prodloužit o $\boldsymbol{b}^i_{k_i+1} \in V$, čili $g_\lambda(\boldsymbol{b}^i_{k_i+1}) = \boldsymbol{c}^i_{k_i}$ pro $i \in \{1, \ldots, d'\}$.

Vektory $\boldsymbol{c}^1_1, \ldots, \boldsymbol{c}^{d'}_1$ tvoří bázi prostoru $\ker(g_\lambda) \cap W$.

Doplníme je o vektory $\boldsymbol{b}^{r+1}_1, \ldots, \boldsymbol{b}^{r+d-d'}_1$ na bázi $\ker(g_\lambda)$.

Vektory $\boldsymbol{b}^{r+1}_1, \ldots, \boldsymbol{b}^{r+d-d'}_1$ vytvoří $d - d'$ nových řetězců délky 1.

Tím jsme dostali řetězce:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\boldsymbol{b}^1_{k_1+1} & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^1_{k_1} & \xrightarrow{g_\lambda} & \cdots & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^1_2 & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^1_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & & & \vdots \\
& & \boldsymbol{b}^{d'}_{k_{d'}+1} & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^{d'}_{k_{d'}} & \xrightarrow{g_\lambda} & \cdots & \xrightarrow{g_\lambda} & \boldsymbol{c}^{d'}_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
& & & & \boldsymbol{c}^{d'+1}_{k_{d'+1}} & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \cdots & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \boldsymbol{c}^{d'+1}_1 & \xrightarrow{g_{\lambda'}} & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & & & \vdots \\
& & & & \boldsymbol{c}^r_{k_r} & \xrightarrow{g_{\lambda'\cdots'}} & \cdots & \xrightarrow{g_{\lambda'\cdots'}} & \boldsymbol{c}^r_1 & \xrightarrow{g_{\lambda'\cdots'}} & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & \boldsymbol{b}^{r+1}_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0} \\
& & & & & & & & & & \vdots \\
& & & & & & & & \boldsymbol{b}^{r+d-d'}_1 & \xrightarrow{g_\lambda} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

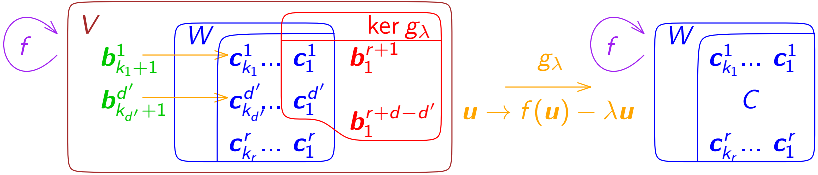
V naší ukázce:

$$
\begin{array}{ccccc}
(2,2,1)^{\mathsf{T}} & \xrightarrow{g_2} & (3,2,1)^{\mathsf{T}} & \xrightarrow{g_2} & \mathbf{0} \\
& & (1,1,1)^{\mathsf{T}} & \xrightarrow{g_1} & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Žádné $\boldsymbol{b}^{r+i}_1$ nemáme, protože $d = d' = 1$.

K bázi C jsme přidali $d = \dim(\ker g_\lambda)$ vektorů, celkem jich je stejně jako je dimenze prostoru V.

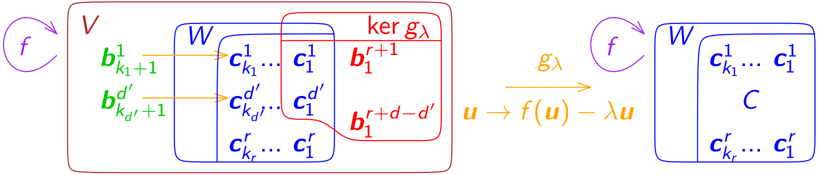
Ukážeme-li, že jsou nezávislé, lze za hledanou bázi B prostoru V vzít vektory $\boldsymbol{c}^1_1, \ldots, \boldsymbol{c}^r_{k_r}, \boldsymbol{b}^1_{k_1+1}, \ldots, \boldsymbol{b}^{d'}_{k_{d'}+1}, \boldsymbol{b}^{r+1}_1, \ldots, \boldsymbol{b}^{r+d-d'}_1$.



Nechť platí: $\sum_{i,j} a^i_j \mathbf{c}^i_j + \sum_{i} a^i_{k_i+1} \mathbf{b}^i_{k_i+1} + \sum_{i} a^{r+i}_1 \mathbf{b}^{r+i}_1 = \mathbf{0}$. Dostáváme
$\mathbf{0} = g_\lambda(\mathbf{0}) = g_\lambda\left(\sum_{i,j} a^i_j \mathbf{c}^i_j + \sum_{i} a^i_{k_i+1} \mathbf{b}^i_{k_i+1} + \sum_{i} a^{r+i}_1 \mathbf{b}^{r+i}_1\right) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \mathbf{c}^i_j$.

Z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{c}^1_1, \dots, \mathbf{c}^r_{k_r}$ máme nutně $\alpha^i_j = 0 = \begin{cases} a^i_{k_i+1} & \text{pro } i \le d', j = k_i \\ a^i_{j+1} & \text{pro } i \le d', j < k_i \\ (\lambda^* - \lambda) a^i_j & \text{pro } d' < i \le r, j = k_i \\ (\lambda^* - \lambda) a^i_j + a^i_{j+1} & \text{pro } d' < i \le r, j < k_i \end{cases}$
kde $\lambda^* \ne \lambda$ odpovídá i-tému řetězci

Pro $i \le d'$ totiž platí: $g_\lambda(\mathbf{b}^i_{k_i+1}) = \mathbf{c}^i_{k_i}$ a $g_\lambda(\mathbf{c}^i_j) = \mathbf{c}^i_{j-1}$, a dále
pro $i > d'$ platí: $g_\lambda(\mathbf{c}^i_1) = f(\mathbf{c}^i_1) - \lambda \mathbf{c}^i_1 = \lambda^* \mathbf{c}^i_1 - \lambda \mathbf{c}^i_1 = (\lambda^* - \lambda)\mathbf{c}^i_1$,
přičemž pro $j > 1$ navíc platí: $g_\lambda(\mathbf{c}^i_j) = f(\mathbf{c}^i_j) - \lambda \mathbf{c}^i_j =$
$f(\mathbf{c}^i_j) - \lambda^* \mathbf{c}^i_j + (\lambda^* - \lambda)\mathbf{c}^i_j = g_{\lambda^*}(\mathbf{c}^i_j) + (\lambda^* - \lambda)\mathbf{c}^i_j = \mathbf{c}^i_{j-1} + (\lambda^* - \lambda)\mathbf{c}^i_j$.



Nechť platí: $\sum_{i,j} a^i_j \boldsymbol{c}^i_j + \sum_i a^i_{k_i+1} \boldsymbol{b}^i_{k_i+1} + \sum_i a^{r+i}_1 \boldsymbol{b}^{r+i}_1 = \mathbf{0}$. Dostáváme

$$\mathbf{0} = g_\lambda(\mathbf{0}) = g_\lambda\Big(\sum_{i,j} a^i_j \boldsymbol{c}^i_j + \sum_i a^i_{k_i+1} \boldsymbol{b}^i_{k_i+1} + \sum_i a^{r+i}_1 \boldsymbol{b}^{r+i}_1\Big) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \boldsymbol{c}^i_j.$$

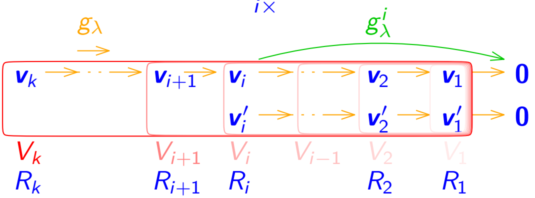
Z lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{c}^1_1, \dots, \boldsymbol{c}^r_{k_r}$ máme nutně
$$\alpha^i_j = 0 = \begin{cases} a^i_{k_i+1} & \text{pro } i \le d', j = k_i \\ a^i_{j+1} & \text{pro } i \le d', j < k_i \\ (\lambda^* - \lambda) a^i_j & \text{pro } d' < i \le r, j = k_i \\ (\lambda^* - \lambda) a^i_j + a^i_{j+1} & \text{pro } d' < i \le r, j < k_i \end{cases}$$
kde $\lambda^* \neq \lambda$ odpovídá i-tému řetězci

První případ dává: $\forall i : a^i_{k_i+1} = 0$, druhý: $\forall i \le d', \forall j > 1 : a^i_j = 0$ a další dva: $\forall d' < i \le r, \forall j : a^i_j = 0$. V kombinaci pak zbývají jen koeficienty a^i_1 pro $i \le d'$ a $i > r$, ale ty jsou také nulové, protože příslušné vektory $\boldsymbol{c}^1_1, \dots, \boldsymbol{c}^{d'}_1, \boldsymbol{b}^{r+1}, \dots, \boldsymbol{b}^{r+d-d'}$ tvoří bázi $\ker g_\lambda$.

Výpočet řetězců odpovídajících λ

Značení: Zobrazení $g_\lambda^i = \underbrace{g_\lambda \circ g_\lambda \circ \cdots \circ g_\lambda}_{i\times}$ ... odpovídá matici $(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I})^i$

Postup:



- Určíme posloupnost prostorů $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_k$, kde $V_i = \ker(g_\lambda^i)$ a $k = \min\{i : \ker(g_\lambda^i) = \ker(g_\lambda^{i+1})\}$.
- Položíme $R_{k+1} = \emptyset$ a pro i od k po 1:
  - spočítáme množinu $g_\lambda(R_{i+1})$

    ... prodloužíme již započaté řetězce
  - a rozšíříme ji o vektory z $V_i \setminus V_{i-1}$ na lineárně nezávislou množinu R_i velikosti $\dim V_i - \dim V_{i-1}$

    ... doplníme do R_i začátky nových řetězců

Jordanově buňce velikosti i odpovídá řetězec, co začíná vektorem $\boldsymbol{v}_i \in R_i \setminus g_\lambda(R_{i+1})$ a pokračuje jeho obrazy $\boldsymbol{v}_{i-j} = g_\lambda^j(\boldsymbol{v}_i) \in R_{i-j}$.

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 & 2 & -3 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & -4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Charakteristický polynom:

$$p_{\boldsymbol{A}}(x) = x^7 - 6x^6 + 15x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 6x^2 + x = x(x-1)^6$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$.

Protože má λ_1 algebraickou násobnost 1, má i geometrickou násobnost 1 a odpovídá Jordanově buňce velikosti 1.

$$\xrightarrow{g_{\lambda_1}} \quad (0,0,1,1,0,0,1)^{\mathsf{T}} \quad \rightarrow \mathbf{0}$$

Vlastnímu číslu λ_1 přísluší vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,1,1,0,0,1)^{\mathsf{T}}$.

Ukázka

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \xrightarrow{g_{\lambda_2}} & & \xrightarrow{g_{\lambda_1}} \; (0,0,1,1,0,0,1)^{\mathsf{T}} & \to & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{v}_4' & \to & \boldsymbol{v}_3' & \to & \boldsymbol{v}_2' & \to & \boldsymbol{v}_1' & \to & \mathbf{0} \\
V_4 & & V_3 & & \boldsymbol{v}_2'' & \to & \boldsymbol{v}_1'' & \to & \mathbf{0} \\
 & & & & V_2 & & V_1 & &
\end{array}
$$

Matice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda_2 \mathbf{I}_7 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 2 & -3 & -2 & -8 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ má hodnost 5.

$\dim V_1 = 7 - 5 = 2$.

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ proto odpovídají dvě Jordanovy buňky, neboli dva řetězce.

Pro určení délek řetězců je třeba spočítat dimenze $V_2, V_3, \ldots$

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^2) = 3 \Rightarrow \dim V_2 = 4 \Rightarrow$ oba řetězce mají délku alespoň 2,

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^3) = 2 \Rightarrow \dim V_3 = 5 \Rightarrow$ jeden má délku 2 a druhý 4.

(Lze ověřit, že $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^4) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^5) = 1 \Rightarrow V_4 = V_5$ dimenze 6.)

Jordanův normální tvar je $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ukázka — výpočet zobecněných vlastních vektorů

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \xrightarrow{g_{\lambda_2}} & & \xrightarrow{g_{\lambda_1}} & (0,0,1,1,0,0,1)^{\mathsf T} & \to & \mathbf{0} \\
(1,0,0,0,0,0,0)^{\mathsf T} & \to & (-3,-2,0,2,1,-2,2)^{\mathsf T} & \to & (4,1,1,-2,-1,0,-1)^{\mathsf T} & \to & (-2,0,-1,0,0,0,0)^{\mathsf T} & \to & \mathbf{0} \\
 & & & & (0,0,0,3,-1,-4,2)^{\mathsf T} & \to & (1,-3,-1,-3,0,-3,0)^{\mathsf T} & \to & \mathbf{0} \\
V_4 & & V_3 & & V_2 & & V_1 & &
\end{array}$$

V_4 má bázi např. $((1,0,0,0,0,0,0)^{\mathsf T}, (0,1,0,0,0,0,1)^{\mathsf T}, (0,0,1,0,0,0,0)^{\mathsf T}, (0,0,0,1,0,0,0)^{\mathsf T}, (0,0,0,0,1,0,2)^{\mathsf T}, (0,0,0,0,0,1,-1)^{\mathsf T})$.

Zvolíme např. $\boldsymbol{v}_4' = (1,0,0,0,0,0,0)^{\mathsf T} \in V_4 \setminus V_3$, potom
$\boldsymbol{v}_3' = g_{\lambda_2}(\boldsymbol{v}_4') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_4' = (-3,-2,0,2,1,-2,2)^{\mathsf T} \in V_3$ a
$\boldsymbol{v}_2' = g_{\lambda_2}(\boldsymbol{v}_3') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_3' = (4,1,1,-2,-1,0,-1)^{\mathsf T} \in V_2$.

Zvolíme vektor $\boldsymbol{v}_2'' \in V_2 \setminus V_1$ lineárně nezávislý na $\boldsymbol{v}_2'$ (později ukážeme jak), např. $\boldsymbol{v}_2'' = (0,0,0,3,-1,-4,2)^{\mathsf T}$.

Nyní $\boldsymbol{v}_1' = g_{\lambda_2}(\boldsymbol{v}_2') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_2' = (-2,0,-1,0,0,0,0)^{\mathsf T} \in V_1$
a $\boldsymbol{v}_1'' = g_{\lambda_2}(\boldsymbol{v}_2'') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}_2'' = (1,-3,-1,-3,0,-3,0)^{\mathsf T} \in V_1$.

Hledaná regulární matice $\boldsymbol{R}$ pro $\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{J}$ je

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_1' & \boldsymbol{v}_2' & \boldsymbol{v}_3' & \boldsymbol{v}_4' & \boldsymbol{v}_1'' & \boldsymbol{v}_2'' \\ | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ukázka — volba $\boldsymbol{v}_2''$

Spočítáme bázi V_2, neboli prostoru $\ker(\boldsymbol{B}^2)$.

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 & -2 & 6 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 4 & 2 & -8 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \ker(\boldsymbol{B}^2) =$$

$$= \mathrm{span}\{(-2,0,-1,0,0,0,0)^T, (0,2,0,1,-1,0,0)^T, (1,-1,0,-1,0,-1,0)^T, (2,-1,0,-3,0,0,-1)^T\}$$

Vektory báze po řádcích vložíme do matice a převedeme ji do odst. tvaru.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_1$$

Totéž provedeme pro prostor V_1, k jehož bázi přidáme $\boldsymbol{v}_2'$.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 & 2 & -3 & -2 & -8 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & -4 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\ker(\boldsymbol{B}) = \mathrm{span}\{(2,0,-1,0,0,0,0)^T, (1,-1,0,-1,0,-1,0)^T\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_2$$

Řádek z $\boldsymbol{M}_1$ s pivotem v jiném sloupci, než kde jsou pivoty z $\boldsymbol{M}_2$, je $\boldsymbol{v}_2''$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik různých Jordanových tvarů má matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ se dvěma různými vlastními čísly algebraické násobnosti 4, kde jedno má geometrickou násobnost 3 a druhé 1?
   a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 6, f) 8, g) 9, h) 10, i) 12, j) 24.
2. Pravda nebo lež? Platí-li pro $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, že $p_{\boldsymbol{A}}(x) = p_{\boldsymbol{B}}(x)$ a každé vlastní číslo má v obou maticích stejnou geometrickou násobnost, pak si jsou matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ podobné.
3. Každá komplexní čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je podobná
   a) $-\boldsymbol{A}$, b) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}$, c) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$, d) $\boldsymbol{A}^{-1}$, e) $\boldsymbol{A}^2$.
4. Zobecněné vlastní vektory použité při převodu matice do Jordanova normálního tvaru jsou lineárně nezávislé: a) vždy,
   b) jen když přísluší různým vlastním číslům,
   c) jen když přísluší různým Jordanovým buňkám.

Komentář k řešení kvízu

1. Počty bloků udávají geometrické násobnosti. Z nich jsou dva shodné. Tyto 4 bloky lze uspořádat $\binom{4}{2,1,1} = 12$ způsoby.
2. Geometrická násobnost určuje počet bloků nikoli jejich násobnost. Protipříkladem jsou matice se dvěma bloky a týmž vlastním číslem, kde velikosti v jedné jsou $1, 3$ a v druhé $2, 2$.
3. U transpozice stačí ukázat, že libovolný Jordanův blok je podobný své transpozici, což plyne z geometrické násobnosti. Ostatní operace mění vlastní čísla na $-\lambda, \overline{\lambda}, \lambda^{-1}$ a λ^2, resp.
4. Zobecněné vlastní vektory tvoří sloupce matic použitých v převodu do Jordanova normálního tvaru. Tyto matice jsou regulární, a proto jsou jejich sloupce vždy lineárně nezávislé.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Proč věta platí pro výchozí případ indukce, čili pro prostory dimenze 1?
- Ve kterých případech je prázdná množina $\{\boldsymbol{b}^1_{k_1+1}, \dots, \boldsymbol{b}^{d'}_{k_{d'}+1}\}$ a kdy $\{\boldsymbol{b}^{r+1}_1, \dots, \boldsymbol{b}^{r+d-d'}_1\}$?
- Za jakých okolností selže postup, ve kterém bychom řetězce budovali z druhé strany? Tj. nejprve bychom zvolili bázi $\mathrm{ker}(g_\lambda)$ a poté vybírali ze vzorů těchto vektorů v zobrazení g_λ.
- Které vlastnosti komplexních čísel byly v důkazu využity? Za jakých dodatečných předpokladů by věta platila i nad obecnými tělesy?