Speciální komplexní matice

Značení: *Komplexně sdružené* číslo k $z = a + bi \in \mathbb{C}$ je $\overline{z} = a - bi$.

Definice: *Hermitovská transpozice* komplexní matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matice $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ kde $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Definice: Matice $\boldsymbol{A}$ je *hermitovská*, pokud $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

Definice: Matice $\boldsymbol{A}$ je *unitární*, pokud $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$.

Ukázky:

reálná — $\mathbb{R}$	komplexní — $\mathbb{C}$
transpozice $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	Hermitovská transpozice $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$
symetrická $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	hermitovská $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$
ortogonální $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	unitární $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Vlastnosti

Pozorování: Hermitovské matice mají reálnou diagonálu:
Pokud $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$, pak $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Pozorování: $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}, \quad (\boldsymbol{AB})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$.

Pozorování: Jestliže je $\boldsymbol{A}$ unitární, pak $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}$ je také unitární:
$(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{-1}$

Pozorování: Součin unitárních matic je unitární:
Pokud $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{B}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{B}^{-1}$, pak
$(\boldsymbol{AB})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1}$.

Pozorování: Unitární $\boldsymbol{A}$ splňuje: $\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.
T.j. pokud $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ jsou sloupce $\boldsymbol{A}$,
pak $\boldsymbol{v}_i^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v}_j = 0$ pro $i \neq j$ a $\boldsymbol{v}_i^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v}_i = 1$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \\ | & & | \\ \hline \end{array}$$

Fakt: Každý $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v} = 1$
lze doplnit na unitární matici.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline | & \\ \boldsymbol{v} & \ldots \\ | & \\ \hline \end{array}$$

Důkaz později.

Diagonalizace hermitovských matic

Věta: Každá hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Ukázka: Diagonalizace hermitovské matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$.

$$p_{\boldsymbol{A}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t) - (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = t^2 - 3t$$

Vlastní čísla $\boldsymbol{A}$ jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 0$.

Odpovídající unitární matice složená z vlastních vektorů je: $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(Tato $\boldsymbol{R}$ je dokonce inverzní sama k sobě: $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}$.)

Diagonalizace probíhá podle součinu: $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pokud obrátíme pořadí vlastních čísel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, dostaneme:

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ a } \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Diagonalizace hermitovských matic

Věta: Každá hermitovská matice $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla reálná. Navíc existuje unitární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Důkaz: Indukcí podle n. Věta platí pro $n = 1$. Označme $\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}$.

V tělese $\mathbb{C}$ má matice $\boldsymbol{A}_n$ vlastní číslo λ s vlastním vektorem $\boldsymbol{v}$.

Upravíme $\boldsymbol{v}$ násobkem $\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v}}}$, abychom dostali $\boldsymbol{v}$ splňující $\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v} = 1$.

Doplníme (vizte fakt dříve) $\boldsymbol{v}$ na unitární matici $\boldsymbol{P}_n$.

$\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n$ je hermitovská: $(\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n)^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n^{\mathsf{H}}(\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n$.

Protože $\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, matice $\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n$ má $\lambda\boldsymbol{v}$ jako první sloupec.

Protože $\boldsymbol{P}_n$ je unitární, první sloupec $\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n$ je $\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}(\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v} = \lambda(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} = (\lambda, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$.
$\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n$ je hermitovská $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ a zbytek prvního řádku je $\mathbf{0}^{\mathsf{T}}$.

Proto $\boldsymbol{P}_n^{\mathsf{H}}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \hline \end{array}$, kde $\boldsymbol{A}_{n-1}$ je hermitovská.

Dle indukčního předpokladu pro $\boldsymbol{A}_{n-1}$ určíme unitární matici $\boldsymbol{R}_{n-1}$, že $\boldsymbol{R}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{R}_{n-1}$ je diagonální matice $\boldsymbol{D}_{n-1}$.

Položíme $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{P}_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline \end{array}$. Součin unitárních matic je unitární.

Nyní stačí ověřit:

$$\boldsymbol{R}_n^{-1}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{R}_n^\mathsf{H}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^\mathsf{H} \\ \hline \end{array} \cdot \boldsymbol{P}_n^\mathsf{H}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_n \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1}^\mathsf{H} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{n-1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_{n-1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_{n-1} \\ \hline \end{array} = \boldsymbol{D}_n$$

Věta: Každá *reálná symetrická* matice $\boldsymbol{A}$ má všechna vlastní čísla reálná a existuje *ortogonální* $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ je diagonální.

Podle stejného důkazu, jen je třeba najít reálný vlastní vektor $\boldsymbol{v}$. Takový $\boldsymbol{v}$ existuje, protože soustava $(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ má všechny koeficienty reálné. Pro $\boldsymbol{v}^\mathsf{T}\boldsymbol{v} = 1$ pak hledáme ortogonální $\boldsymbol{P}_n$.

Ukázka diagonalizace podle důkazu

Dána $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2(1+i)}{3} & \frac{-1-i}{3} \\ \frac{2(1-i)}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2i}{3} \\ \frac{-1+i}{3} & -\frac{2i}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

Nejprve určíme $p_{\boldsymbol{A}_3}(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

Vlastnímu číslu $\lambda = 2$ přísluší $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)^T$.

Znormalizujeme jej na $\boldsymbol{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$.

Vektor $\boldsymbol{v}$ doplníme na unitární: $\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ a získáme hermitovskou: $\boldsymbol{P}_3^H \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{P}_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{array}\right)$

Podle indukčního předpokladu pro $\boldsymbol{A}_2$ existují $\boldsymbol{R}_2$ a $\boldsymbol{D}_2$ takové, že:

$$\boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{D}_2$$

Zvolíme $\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{P}_3 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{R}_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-3+i}{3\sqrt{3}} & \frac{-1-2i}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2i}{3\sqrt{3}} & \frac{4+2i}{3\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & \frac{3-2i}{3\sqrt{3}} & \frac{-1+i}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Pak platí: $\boldsymbol{R}_3^{-1} \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{D}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Každá permutační matice je: a) symetrická, b) hermitovská, c) ortogonální, d) unitární.
2. Množina hermitovských matic je uzavřena na: a) sčítání, b) odčítání, c) násobky, d) součiny, e) transpozice, f) inverze.
3. Množina unitárních matic je uzavřena na: a) sčítání, b) odčítání, c) násobky, d) součiny, e) transpozice, f) inverze.
4. Každá hermitovská matice má všechna vlastní čísla: a) různá, b) komplexní (ne nutně ryze), c) nenulová, d) taková, že u každého se algebraická a geometrická násobnost shodují.
5. Pravda nebo lež? Každé lineární zobrazení v euklidovském prostoru se symetrickou maticí lze diagonalizovat vhodným natočením os souřadnicového systému (vč. souměrnosti).

Komentář k řešení kvízu

1. Permutační jsou reálné. Matice pro $(2,3,1)$ není symetrická. Prvek $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})_{ij}$ je součin transpozice i-tého sloupce $\boldsymbol{A}$ s j-tým. Různé sloupce permutační $\boldsymbol{A}$ mají 1 v různých řádcích.
2. a-e) Ukáže se stejně jako pro symetrické matice, např. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathsf{H}} + \boldsymbol{B}^{\mathsf{H}} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, f) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{H}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$.
3. a,b) Např. $\mathbf{I} \pm \mathbf{I}$, c) např. $2\mathbf{I}$, d) viz pozorování, e) $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{H}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1}$. f) podobně $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{H}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$.
4. a,c) Např. nulová matice $\mathbf{0}_{2,2}$ řádu 2; b) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d) matice je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ násobnosti se shodují.
5. V příštích lekcích si ukážeme, že je-li matice přechodu ortogonální, je nová báze *ortonormální*. Tyto lze získat z původní báze pomocí rotace a případně i souměrnosti.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Proč věta platí pro výchozí případ matematické indukce čili pro matice řádu 1?
- Proč upravený vektor $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{v}}}\boldsymbol{v}$ splňuje $\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u} = 1$? Kde je tato vlastnost v důkazu využita?
- Které pravidlo pro součin blokových matic bylo v důkazu využito?
- Ve kterém kroku důkazu diagonalizace symetrických reálných matic je třeba využít komplexní čísla?

Poznámky k pojmosloví a značení

Hermitovská transpozice se někdy nazývá „*matice hermitovsky sdružená*“. Kromě $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ se značí také $\boldsymbol{A}^{*}$, $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ ba dokonce i $\boldsymbol{A}^{+}$, ovšem poslední symbol značí také Mooreovu-Penroseovu inverzi.

Hermitovská matice se někdy nazývá „*samosdružená*“, což souvisí s *komplexně sdruženou maticí* $\overline{\boldsymbol{A}}$ definovanou vztahem $(\overline{\boldsymbol{A}})_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

Zápis hermitovské matice $\boldsymbol{A}$ jako součin $\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}$ s unitární $\boldsymbol{R}$ a diagonální $\boldsymbol{D}$ se nazývá *spektrální rozklad* matice $\boldsymbol{A}$.
Podobně lze provést i spektrální rozklad reálné symetrické $\boldsymbol{A}$.