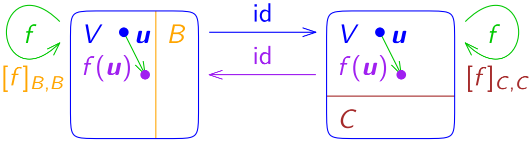
Matice téhož zobrazení vůči různým bázím

Pozorování: Pro lineární zobrazení $f : V \to V$ a báze B, C prostoru V platí: $[f]_{B,B} = [\mathrm{id}]_{C,B}[f]_{C,C}[\mathrm{id}]_{B,C}$

Důkaz: ... plyne ze skládání zobrazení $f = \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}$

$$\begin{aligned}
[f(\boldsymbol{u})]_B &= [f]_{B,B}[\boldsymbol{u}]_B \\
&= [\mathrm{id}]_{C,B}[f(\boldsymbol{u})]_C \;=\; [\mathrm{id}]_{C,B}[f]_{C,C}[\boldsymbol{u}]_C \\
&= [\mathrm{id}]_{C,B}[f]_{C,C}[\mathrm{id}]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B
\end{aligned}$$



$[f(\boldsymbol{u})]_B = [f]_{B,B}[\boldsymbol{u}]_B$ $\quad$ $[f(\boldsymbol{u})]_C = [f]_{C,C}[\boldsymbol{u}]_C$

$[f(\boldsymbol{u})]_B = [\mathrm{id}]_{C,B}[f(\boldsymbol{u})]_C$ $\quad$ $[\boldsymbol{u}]_C = [\mathrm{id}]_{B,C}[\boldsymbol{u}]_B$

Matice přechodu jsou regulární a splňují $[\mathrm{id}]_{C,B} = [\mathrm{id}]_{B,C}^{-1}$

Podobné matice

Matice téhož zobrazení vůči různým bázím mají stejná vlastní čísla.

Definice Matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T^{n\times n}$ jsou si *podobné*, pokud existuje regulární matice $\boldsymbol{R}$ taková, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$.

Pozorování: Pokud je $\boldsymbol{A}$ podobná $\boldsymbol{B}$, t.j. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$,
a vlastní číslo λ přísluší vlastnímu vektoru $\boldsymbol{v}$ v $\boldsymbol{A}$,
pak λ je také vlastní číslo $\boldsymbol{B}$ příslušné vektoru $\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$ platí $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}$.

Důsledek: Je-li λ vlastní číslo $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}$ je podobná $\boldsymbol{B}$,
pak λ má v matici $\boldsymbol{B}$ shodnou *geometrickou* násobnost jako v $\boldsymbol{A}$.
… $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$ je isomorfismus podprostorů vlastních vektorů

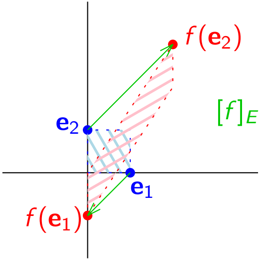
Pozorování: Pokud $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$, pak $p_{\boldsymbol{B}}(x) = p_{\boldsymbol{A}}(x)$.

Důkaz: $p_{\boldsymbol{B}}(x) = \det(\boldsymbol{B} - x\mathbf{I}) = \det(\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} - \boldsymbol{R}(x\mathbf{I})\boldsymbol{R}^{-1}) =$
$\det(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I})\boldsymbol{R}^{-1}) = \det\boldsymbol{R}\det(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I})\det\boldsymbol{R}^{-1} = p_{\boldsymbol{A}}(x)$

Důsledek: Je-li λ vlastní číslo $\boldsymbol{A}$ a matice $\boldsymbol{A}$ je podobná $\boldsymbol{B}$,
pak λ má v matici $\boldsymbol{B}$ shodnou *algebraickou* násobnost jako v $\boldsymbol{A}$.

Ukázka — lineární zobrazení v rovině

Má následující lineární zobrazení lepší popis?



$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

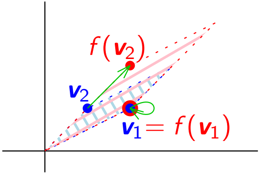
Charakteristický polynom:

$$p_{[f]_{E,E}}(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ má vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (2,1)^\mathsf{T}$ a
vlastní číslo $\lambda_2 = 2$ má vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1,1)^\mathsf{T}$.

S ohledem na novou bázi $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} = \{(2,1)^\mathsf{T}, (1,1)^\mathsf{T}\}$
je matice *stejného* lineárního zobrazení f *diagonální*:

$$[f]_{B,B} = [\mathrm{id}]_{E,B}[f]_{E,E}[\mathrm{id}]_{B,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$[f]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méně formálně: rovina je fixována podél přímky skrz $\boldsymbol{v}_1$
a dvakrát natažena podél přímky skrz $\boldsymbol{v}_2$.

Všimněte si, že vlastní čísla a vlastní vektory se zachovávají.

Algebraická a geometrická násobnost

Pozorování: Pokud báze B obsahuje vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ zobrazení f, pak souřadnice odpovídající $\boldsymbol{v}$ je vynásobena λ při provedení f, čili sloupec matice $[f]_{B,B}$ odpovídající $\boldsymbol{v}$ má λ na diagonále a jinde 0.

Důkaz: Je-li vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ zároveň i-tým vektorem báze B, pak i-tý sloupec matice $[f]_{B,B}$ je $[f(\boldsymbol{v})]_B = [\lambda \boldsymbol{v}]_B = \lambda[\boldsymbol{v}]_B = \lambda \mathbf{e}_i$.

Věta: Pro každé vlastní číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ platí, že geometrická násobnost λ je menší nebo rovna jeho algebraické násobnosti.

Důkaz: Vezměme $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ jako matici lineárního zobrazení $f : T^n \to T^n$ vzhledem ke standardní bázi E, tzn. $\boldsymbol{A} = [f]_{E,E}$.
Nechť $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ je bází prostoru vlastních vektorů příslušných λ, čili k je geometrická násobnost vlastního čísla λ.
Doplníme $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ na bázi B prostoru T^n.
Potom $[f]_{B,B} = [\mathrm{id}]_{B,E}^{-1} \boldsymbol{A} [\mathrm{id}]_{B,E}$ je podobná $\boldsymbol{A}$ a přitom $[f]_{B,B}$ má v prvních k sloupcích na diagonále λ a jinak nuly.
Odtud $(\lambda - x)^k$ dělí $p_{[f]_{B,B}}(x)$. Protože $\boldsymbol{A}$ a $[f]_{B,B}$ mají stejné charakteristické polynomy, má λ algebraickou násobnost alespoň k.

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$p_{\boldsymbol{A}}(x) = -x^3+5x^2-8x+4 = (x-2)^2(x-1)$
vlastní čísla jsou: 2 *algebraické násobnosti* 2 a 1 algebraické násobnosti 1.

$$\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo 2 má v $\boldsymbol{A}$ *geometrickou násobnost* jen 1.

Vlastní vektor $(3,2,1)^{\mathsf{T}}$ příslušný k 2 doplníme na bázi B, např. $B = \{(3,2,1)^{\mathsf{T}}, (2,2,1)^{\mathsf{T}}, (1,1,1)^{\mathsf{T}}\}$.

Matice $\boldsymbol{A}$ je podobná $[\mathrm{id}]_{B,E}^{-1}\boldsymbol{A}[\mathrm{id}]_{B,E} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$p_{\boldsymbol{A}}(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = (x-2)^2(x-1)$
vlastní čísla jsou: 2 *algebraické násobnosti* 2 a 1 algebraické násobnosti 1.

$$\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo 2 má v $\boldsymbol{A}$ *geometrickou násobnost* jen 1.

Pro srovnání,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má stejný charakteristický polynom
$p_{\boldsymbol{C}}(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = (x-2)^2(x-1)$
a stejná vlastní čísla, t.j. 2 algebraické násobnosti 2 a 1 algebraické násobnosti 1.

$$\boldsymbol{C} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo 2 má v $\boldsymbol{C}$ geometrickou násobnost 2.

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ -2 & 7 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$p_{\boldsymbol{A}}(x) = -x^3+5x^2-8x+4 = (x-2)^2(x-1)$
vlastní čísla jsou: 2 *algebraické násobnosti* 2 a 1 algebraické násobnosti 1.

$$\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní číslo 2 má v $\boldsymbol{A}$ *geometrickou násobnost* jen 1.

Pro srovnání,

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má stejný charakteristický polynom
$p_{\boldsymbol{C}}(x) = -x^3+5x^2-8x+4 = (x-2)^2(x-1)$
a stejná vlastní čísla, t.j. 2 algebraické násobnosti 2 a 1 algebraické násobnosti 1.

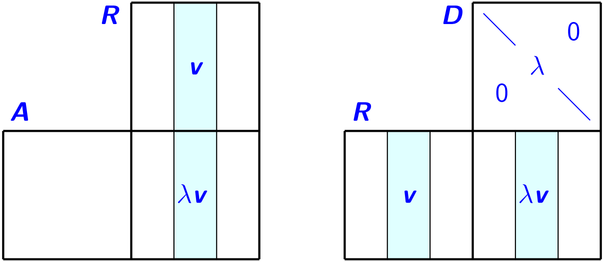
Vůči (shodou okolností stejné) bázi B dostaneme $[\mathrm{id}]_{B,E}^{-1}\boldsymbol{C}[\mathrm{id}]_{B,E}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizace

Pozorování: Matice $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je podobná diagonální matici, *právě když* prostor T^n má bázi sestávající se z vlastních vektorů $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RD}$ s diagonální maticí $\boldsymbol{D}$, pokud pro každé i platí, že existuje vektor $\boldsymbol{v}$ (i-tý sloupec $\boldsymbol{R}$) takový, že $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v} = d_{ii}\boldsymbol{v}$.



$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{RDR}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RD} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{D}$$

Diagonalizace

Pozorování: Matice $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ je podobná diagonální matici, *právě když* prostor T^n má bázi sestávající se z vlastních vektorů $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RD}$ s diagonální maticí $\boldsymbol{D}$, pokud pro každé i platí, že existuje vektor $\boldsymbol{v}$ (i-tý sloupec $\boldsymbol{R}$) takový, že $\boldsymbol{Av} = \lambda \boldsymbol{v} = d_{ii} \boldsymbol{v}$.

Definice: Matice podobná diagonální matici je *diagonalizovatelná*.

Důsledek: Pro čtvercovou matici řádu n platí, že má-li n různých vlastních čísel, pak je diagonalizovatelná.

Důsledek: Když $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{r_i}$, pak:

$$\boldsymbol{A} \text{ je diagonalizovatelná} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i : \dim(\ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i \mathbf{I})) = r_i$$

Důsledek: Je-li $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{DR}$, pak pro každé k platí:
$\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{DR})^k = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} \cdots \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{DR} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{R}$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež?
   Jednotková matice je podobná jen sama sobě.
2. Pravda nebo lež?
   Reálné matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ si jsou podobné.
3. Pravda nebo lež?
   Reálné matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ si jsou podobné.
4. Kolik tříd ekvivalence má relace podobnosti na diagonalizovatelných maticích ze $\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$?
   a) 1, b) 5, c) 10, d) 25, e) 35, f) 50, g) 125.
5. Singulární matice může být podobná:
   a) jen nulové matici, b) nulové i nenulové matici,
   c) jen singulární matici, d) regulární i singulární matici,
   e) jen nediagonální matici, f) diagonální i nediagonální matici.

Komentář k řešení kvízu

1. Pro každou regulární $\boldsymbol{R}$ dostaneme: $\boldsymbol{R}^{-1}\mathbf{I}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R} = \mathbf{I}$.
2. Trojúhelníková $\boldsymbol{A}$ má dvě různá vlastní čísla 1 a 2 na diagonále, proto je diagonalizovatelná a podobná $\boldsymbol{B}$.
3. Vlastní číslo 2 má v maticích $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ různou geometrickou násobnost, proto si nemohou být podobné.
4. Počet tříd odpovídá různým možnostem výběru vlastních čísel. Neuspořádaných výběrů 3 prvků z 5-prvkové množiny je $\binom{7}{3}$.
5. b,f) matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ je singulární nenulová diagonální;

   c) součin se singulární maticí nemůže dát regulární výsledek.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak spolu souvisejí hodnosti podobných matic?
- Jak spolu souvisejí algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel podobných matic?
- Kterou matici dostaneme součinem $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ pokud je $\boldsymbol{D}$ diagonální a $\boldsymbol{P}$ permutační?

Poznámky k pojmosloví a značení

Podobnost matic je relace ekvivalence daná vztahem $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$, odvozeným od souvisejících lineárních zobrazení, *nikoli* od podobnosti tvaru či obsahu matic.

Příbuzná ekvivalence je *kongruence matic* daná vztahem $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$, odvozeným od tzv. kvadratických forem. (Matice $\boldsymbol{R}$ musí být zde též regulární.)

Jde o jiný pojem, i když se ekvivalence mohou částečně překrývat v případě $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$ jako např. u ortogonálních matic.