

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Symbol $\mathbf{0}_{n,n}$ značí nulovou čtvercovou matici řádu n .

Ukázka:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^3 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 13 & 2 & 12 \\ 9 & -1 & 9 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M}$ pro $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$.

Složky $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n - 1$. Koeficienty u x^{n-1}, \dots, x^0 určují $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$, čímž dostaneme: $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$.

Ukázka:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_3) &= \text{adj} \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x + 4 & 2x - 4 & 6 \\ 3x - 3 & x^2 - 3x + 2 & 3x - 3 \\ x - 5 & -2x + 4 & x^2 - 7 \end{pmatrix} \\ &= x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} = x^2 \mathbf{C}_2 + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M}$ pro $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$.

Složky $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n-1$. Koeficienty u x^{n-1}, \dots, x^0 určují $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$, čímž dostaneme: $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$.

$$\begin{aligned} \text{Nyní: } p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n &= (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1} x^{n-1} \mathbf{I}_n + \dots + b_2 x^2 \mathbf{I}_n + b_1 x \mathbf{I}_n + b_0 \mathbf{I}_n \\ &= (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-2} \mathbf{C}_{n-2} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) \\ &= -x^n \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}) + \dots + x (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

Ukázka:

$$p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n = (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -x^3 + 2x^2 + x - 2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^3 + 2x^2 + x - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^3 + 2x^2 + x - 2 \end{pmatrix}$$

$$= -x^3 \mathbf{I}_3 + 2x^2 \mathbf{I}_3 + x \mathbf{I}_3 - 2 \mathbf{I}_3 = (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^2 \mathbf{C}_2 + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -x^3 \mathbf{C}_2 + x^2 (\mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_2) + x (\mathbf{C}_0 - \mathbf{A} \mathbf{C}_1) - \mathbf{A} \mathbf{C}_0$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M}$ pro $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$.

Složky $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n - 1$. Koeficienty u x^{n-1}, \dots, x^0 určují $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$, čímž dostaneme: $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$.

$$\begin{aligned} \text{Nyní: } p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n &= (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1} x^{n-1} \mathbf{I}_n + \dots + b_2 x^2 \mathbf{I}_n + b_1 x \mathbf{I}_n + b_0 \mathbf{I}_n \\ &= (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-2} \mathbf{C}_{n-2} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) \\ &= -x^n \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}) + \dots + x (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

$$\text{koeficient u } x^n: \quad (-1)^n \mathbf{I}_n = -\mathbf{C}_{n-1} \quad \cdot \mathbf{A}^n \text{ zleva}$$

$$\text{koeficienty u } x^i: \quad b_i \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i-1} \quad \cdot \mathbf{A}^i \text{ zleva}$$

$$\text{koeficient u } x^0: \quad b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \quad \text{ponecháme}$$

Ukázka:

$$-x^3 \mathbf{I}_3 + 2x^2 \mathbf{I}_3 + x \mathbf{I}_3 - 2 \mathbf{I}_3 = -x^3 \mathbf{C}_2 + x^2 (\mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_2) + x (\mathbf{C}_0 - \mathbf{A} \mathbf{C}_1) - \mathbf{A} \mathbf{C}_0$$

$$\Rightarrow -\mathbf{I}_3 = -\mathbf{C}_2, \quad 2 \mathbf{I}_3 = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{C}_0 - \mathbf{A} \mathbf{C}_1, \quad -2 \mathbf{I}_3 = -\mathbf{A} \mathbf{C}_0$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M}$ pro $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$.

Složky $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n - 1$. Koeficienty u x^{n-1}, \dots, x^0 určují $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$, čímž dostaneme: $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$.

$$\begin{aligned} \text{Nyní: } p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n &= (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1} x^{n-1} \mathbf{I}_n + \dots + b_2 x^2 \mathbf{I}_n + b_1 x \mathbf{I}_n + b_0 \mathbf{I}_n \\ &= (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-2} \mathbf{C}_{n-2} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) \\ &= -x^n \mathbf{C}_{n-1} + x^{n-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}) + \dots + x (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

$$\text{koeficient u } x^n: \quad (-1)^n \mathbf{I}_n = -\mathbf{C}_{n-1} \quad \cdot \mathbf{A}^n \text{ zleva}$$

$$\text{koeficienty u } x^i: \quad b_i \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i-1} \quad \cdot \mathbf{A}^i \text{ zleva}$$

$$\text{koeficient u } x^0: \quad b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \quad \text{ponecháme}$$

$$\begin{aligned} \text{Součet všech: } &(-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) \\ &= -\mathbf{A}^n \mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{A}^{n-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}) + \dots + \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{A} \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}_{n,n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ukázka: } &-\mathbf{I}_3 = -\mathbf{C}_2, \quad 2\mathbf{I}_3 = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_2, \quad \dots \Rightarrow -\mathbf{A}^3 = -\mathbf{A}^3 \mathbf{C}_2, \quad \dots \Rightarrow \\ &-\mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3 = -\mathbf{A}^3 \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^2 (\mathbf{A} \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) + \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) - \mathbf{A} \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}_{3,3} \end{aligned}$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Dosadíme-li matici $2\mathbf{I}_n$ do charakteristického polynomu matice \mathbf{I}_n , dostaneme matici:
a) $\mathbf{0}$, b) \mathbf{I}_n , c) $-\mathbf{I}_n$, d) $(-1)^n \mathbf{I}_n$, e) $2\mathbf{I}_n$, f) $2^n \mathbf{I}_n$.
2. Jsou oba součiny \cdot ve výrazu $(\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M}$ stejné binární operace?
a) ano, b) ne, c) jen pro matice řádu nejvýše 2.
3. Pravda nebo lež?
Pro každou matici $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$ jsou matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ a \mathbf{I} lineárně závislé ve vektorovém prostoru $T^{n \times n}$.
4. Charakteristický mnohočlen $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ lze zapsat jako $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot q(\mathbf{A})$, kde q má menší stupeň než $p_{\mathbf{A}}$, pokud je \mathbf{A} :
a) regulární, b) singulární, c) symetrická, d) jednotková.

Komentář k řešení kvízu

1. Třeba určit charakteristický polynom $p_{\mathbf{I}_n}(x) = (1 - x)^n$.
Odtud $p_{\mathbf{I}_n}(2\mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n - 2\mathbf{I}_n)^n = (-\mathbf{I}_n)^n = (-1)^n \mathbf{I}_n$
2. První je skalární násobek, druhý je maticový součin.
Jen u řádu 1 tvoří jediný prvek adjungované matice prázdný součin. Ten bývá definován jako jednotkový prvek tělesa.
3. Koeficienty lineární kombinace dokazující lineární závislost jsou podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty koeficienty charakteristického polynomu $p_{\mathbf{A}}$.
4. Koeficient b_0 je nulový jen u singulárních matic. b) člen $b_1 \mathbf{A}$ lze nahradit $b_1 \mathbf{I} \mathbf{A}$ a pak matici \mathbf{A} vytknout.
Případy a, c) vyvrací např. matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, protože stačí vzít libovolnou regulární symetrickou, která není násobkem \mathbf{I} . U \mathbf{I} a jejích násobků lze sice vytknout \mathbf{I} , ale tím se stupeň p nesníží.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Proč jsou polynomy v adjungované matici někdy o stupeň a někdy o dva menší, než je řád matice?
- ▶ Bylo opravdu nutné porovnávat koeficienty u x a nestačilo jen dosadit do neznámé x matici A ?

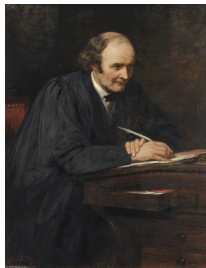
Poznámky k historii

Při studiu vlastností *kvaternionů*, tj. nekomutativního rozšíření komplexních čísel, objevil v roce 1853 W. Hamilton vztah, který odpovídá větě pro některé matice řádu 2 a 4. Jeho žák A. Cayley roku 1858 větu uvedl pro matice a dokázal ji pro řády 2 a 3.

V plné obecnosti větu dokázal až roku 1878 F. Frobenius.



William Rowan Hamilton
1805–1865



Arthur Cayley
1821–1895

Ač univerzitní profesoři a kolegové, oba byli vystudovaní právníci.