Charakteristický polynom

Definice: *Charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$

Ukázka: Charakteristický polynom matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ je

$$\begin{aligned}
p_{\boldsymbol{A}}(x) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)(-1-x)(2-x) + 6 + 6(1-x) - 6(2-x) \\
&= -x^3 + 2x^2 + x - 2
\end{aligned}$$

Charakteristický polynom

Definice: *Charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ je $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$

Věta: Číslo $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$, právě když je λ kořenem jejího charakteristického polynomu $p_{\boldsymbol{A}}(x)$.

Důkaz: λ je vlastní číslo $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{v} \in T^n \setminus \mathbf{0} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$

$\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{v} \in T^n \setminus \mathbf{0} : \mathbf{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - \lambda \mathbf{I}_n \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\boldsymbol{v}$

$\Leftrightarrow$ matice $\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ je singulární

$\Leftrightarrow 0 = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$

Definice: *Algebraická násobnost* vlastního čísla λ_i matice $\boldsymbol{A}$ je rovna násobnosti kořene λ_i v charakteristickém polynomu $p_{\boldsymbol{A}}(x)$.

Důsledek: Je-li T algebraicky uzavřené těleso, lze charakteristický polynom rozložit na lineární faktory dané kořeny, t.j. vlastními čísly: $p_{\boldsymbol{A}}(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1}(\lambda_2 - x)^{r_2} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k}$, kde $r_1 + \cdots + r_k = n$.

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Určete vlastní čísla a vlastní vektory reálné matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Matice má charakteristický polynom $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} =$

$= (1-x)(-1-x)(2-x)+6+6(1-x)-6(2-x) = -x^3+2x^2+x-2$.

Vlastní čísla $\boldsymbol{A}$ jsou kořeny $p_{\boldsymbol{A}}(x)$, tzn. 2, 1 a -1.

Vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1$ pro $\lambda_1 = 2$ je libovolné řešení $(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 & 0 \\ 3 & -1-2 & 3 \\ 1 & -2 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení $\boldsymbol{v}_1$ je libovolný skalární násobek vektoru $(2, 1, -1)^{\mathsf{T}}$.

Vlastní číslo $\lambda_2 = 1$ dává vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ a vlastní číslo $\lambda_3 = -1$ dává vlastní vektor $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)^{\mathsf{T}}$.

Vlastní čísla — kořeny charakteristického polynomu

Nulová matice:

$$\mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad p_{\mathbf{0}_n}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} = (-x)^n$$

Matice $\mathbf{0}_n$ má pouze jedno vlastní číslo 0 algebraické násobnosti n.

Diagonální nebo trojúhelníková matice (také jednotková matice $\mathbf{I}$):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad p_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & * & \dots & * \\ 0 & a_{22}-x & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} =$$

$= \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-x)$ Vlastní čísla $\boldsymbol{A}$ jsou prvky na diagonále $a_{11}, \dots, a_{nn}$.

Matice s jedničkami:

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad p_{\mathbf{1}_n}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & x \\ 0 & -x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -x & x \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -x & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & n-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x)^{n-1}(n-x)$$

Matice $\mathbf{1}_n$ má vlastní číslo 0 algebraické násobnosti $n-1$ a vlastní číslo n algebraické násobnosti 1.

Konstrukce matic podle polynomu

Věta: Pro libovolná $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in T$ má matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix} \in T^{n\times n}$$

charakteristický polynom $(x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(-1)^n$

Důkaz: Rozvoj podle prvního řádku dává rekurenci:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & -b_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1}-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & -b_2 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -b_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1}-x \end{vmatrix} + (-1)^n b_0$$

Uvedený polynom je řešením této rekurence.
(Také lze provést přímo rozvoj podle posledního sloupce.)

Důsledky: Každý polynom $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ s $b_n = (-1)^n$
je charakteristickým polynomem vhodné matice.

Výpočet kořenů polynomu lze převést na výpočet vlastních čísel.

Koeficienty charakteristického polynomu

Pozorování: Označme $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \det(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$, pak platí:

- $b_n = (-1)^n$ ... pouze součin podél diagonály v $\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$ může dát x^n, každý z jeho činitelů má u x koeficient -1.
- $b_0 = \det(\boldsymbol{A})$ ... dosadíme $x = 0$ do $p_{\boldsymbol{A}}(x)$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

... člen x^{n-1} lze získat pouze ze součinu n lineárních členů $(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ na diagonále $\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$ tak, že vybereme $n - 1$ krát výraz $-x$ a jedenkrát a_{ii}.
Výběr lze provést n způsoby, kde sčítance a_{ii} v koeficientu $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ odpovídají různým výběrům $(-x)^{n-1}$.

Koeficienty charakteristického polynomu

Pozorování: Označme $p_{\boldsymbol{A}}(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \det(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$, pak platí:

- $b_n = (-1)^n$ ... pouze součin podél diagonály v $\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$ může dát x^n, každý z jeho činitelů má u x koeficient -1.
- $b_0 = \det(\boldsymbol{A})$ ... dosadíme $x = 0$ do $p_{\boldsymbol{A}}(x)$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Navíc, má-li charakteristický mnohočlen rozklad
$p_{\boldsymbol{A}}(x) = (\lambda_1 - x)^{r_1}(\lambda_2 - x)^{r_2} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k}$, $r_1 + \cdots + r_k = n$, pak:

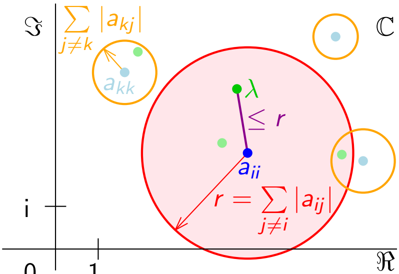
- $b_0 = \det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{r_i}$ ... opět dosadíme $x = 0$ do $p_{\boldsymbol{A}}(x)$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\lambda_i + \cdots + \lambda_i}_{r_i}$

  ... analogicky ze součinu $(\lambda_1 - x)^{r_1}(\lambda_2 - x)^{r_2} \cdots (\lambda_k - x)^{r_k}$.

Věta o Geršgorinových kruzích

Věta: Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pro každé vlastní číslo λ existuje index řádku $i \in \{1, \dots, n\}$ takový, že $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Čili λ náleží kruhu komplexních čísel, která jsou nejvýše $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ vzdálena od a_{ii}, tzv. *Geršgorinovu kruhu*.



Semjon Aronovič Geršgorin
1901–1933

Každé λ náleží sjednocení těchto kruhů, což lze využít na odhady.

Věta o Geršgorinových kruzích

Věta: Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Pro každé vlastní číslo λ existuje index řádku $i \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Důkaz: Uvažme netriviální vlastní vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ příslušný k λ.

Nechť u_i je složka $\boldsymbol{u}$ s největší absolutní hodnotou.

Položíme $\boldsymbol{v} = \frac{1}{u_i}\boldsymbol{u}$. Nyní $v_i = 1$ a $|v_j| \leq 1$ pro $j \neq i$.

V i-té rovnici soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, neboli v $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda v_i$

odečteme od obou stran a_{ii} a dostaneme $\sum\limits_{j\neq i} a_{ij}v_j = \lambda - a_{ii}$.

Z trojúhelníkové nerovnosti $(\forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y|)$ pak

plyne: $|\lambda - a_{ii}| = \left|\sum\limits_{j\neq i} a_{ij}v_j\right| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}v_j| = \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}||v_j| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$.

Aplikace — čísla vlastní populacím králíků

Předpokládejme, že chov králíků popisuje jednoduchý zákon: např. letošní počet králíků je součtem počtů z posledních dvou let.

Nechť F_t označuje počet králíků v roce t. Dostaneme rekurenci pro Fibbonacciho čísla $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$.
Můžeme se ptát, jak se vyvíjí poměr $\frac{F_t}{F_{t-1}}$ — zda má limitu, nebo osciluje, nebo se stává stabilní.

Totéž v jazyce matic a vektorových prostorů:
Uvažme prostor $\mathbb{R}^2$, pak lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dáno

$$\begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{t-1} \\ F_{t-2} \end{pmatrix}$$

popisuje stejnou rekurenci.
Začneme-li např. s jedním králíkem, dostaneme posloupnost:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \dots$$

Stabilní poměr $\frac{F_t}{F_{t-1}}$, mají vektory $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix}$ splňující:

$$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. (Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\lambda\boldsymbol{v}$ mají stejný poměr.)

Matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ má dvě vlastní čísla, jmenovitě:

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . . . složky vektoru s každou iterací rostou

$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ . . . zde se s každou iterací mění znaménko a limita je nulový vektor

Homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty

$$\begin{array}{ccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n \end{array} \quad \text{dává } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Je-li λ vlastní číslo a $(v_1, \ldots, v_n)^{\mathsf{T}}$ je příslušný vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$, potom n-tice funkcí $y_i(x) = v_i e^{\lambda x}$ řeší danou soustavu:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_1 e^{\lambda x})' \\ \vdots \\ (v_n e^{\lambda x})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ \lambda v_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}v_1 e^{\lambda x} & + \cdots + & a_{1n}v_n e^{\lambda x} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}v_1 e^{\lambda x} & + \cdots + & a_{nn}v_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 & + \cdots + & a_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + \cdots + & a_{nn}y_n \end{pmatrix}$$

Poznámka: Ostatní vlastní čísla a vlastní vektory dávají jiná dílčí řešení. Obecným řešením je libovolná lineární kombinace dílčích řešení.

Zpravidla má splňovat ještě dodatečné, tzv. *okrajové podmínky* úlohy.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež? Má-li matice řádu n jediné vlastní číslo λ algebraické násobnosti n, pak je diagonální s λ na diagonále.
2. Kolik různých vlastních vektorů může mít matice ze $\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$?
   a) 0, b) 1, c) 5, d) 9, e) 10, f) 13, g) 15, h) 25,
   i) 29, j) 30, k) 49, l) 50, m) 123, n) 124, o) 125.
3. Každá singulární matice: a) má všechna vlastní čísla $\lambda = 0$,
   b) má alespoň jedno $\lambda = 0$, c) může a nemusí mít $\lambda = 0$,
   d) má všechna $\lambda \neq 0$, e) má alespoň jedno $\lambda \neq 0$.
4. Jakou posloupnost tvoří koeficienty charakteristického polynomu matice $-\mathbf{I}_{10}$?
   a) samých 1, b) samých -1, c) binomických koeficientů,
   d) aritmetickou, e) geometrickou, f) faktoriálů.

Komentář k řešení kvízu

1. Kromě diagonálních může jít např. i o trojúhelníkové matice.
2. Rozborem podle počtu vlastních čísel a jejich geometrických násobností: a) žádné vlastní číslo; c, d, f) 1, 2 resp. 3 vlastní čísla násobnosti 1 — příslušné jednodimenzionální prostory se protínají v $\mathbf{0}$; h, o) jedno vlastní číslo násobnosti 2, resp. 3; i) dvě různá vlastní čísla, jedno násobnosti 1 a druhé 2.
3. Determinant singulárních matic je 0, a proto x dělí charakteristický polynom. Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má i vlastní číslo 1.
4. Přímo z definice dostaneme: $p_{-\mathbf{I}_{10}}(x) = \det(-\mathbf{I}_{10} - x\mathbf{I}_{10})$ $= (-1-x)^{10} = (1+x)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} x^i$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jakým postupem lze úlohu hledání kořenů *libovolného* polynomu převést na hledání vlastních čísel?
- Proč je u výpočtu koeficientu b_{n-1} charakteristického polynomu uvedeno $\underbrace{\lambda_i + \cdots + \lambda_i}_{r_i}$ a nikoli $r_i \lambda_i$?
- Mají všechny lineární rekurence na $\mathbb{R}$ limitu podílu dvou po sobě jdoucích hodnot, nebo ji některé nemají?

Poznámky k pojmosloví a značení

Charakteristický polynom někdy bývá definován jako $\det(x\mathbf{I} - \boldsymbol{A})$.
Vedoucí člen má v něm vždy kladné znaménko.
Pojem „*charakteristický polynom*“ zavedl 1839 A.-L. Cauchy.

Historie kořenů charakteristického polynomu jde proti výkladu:
Vztah řešení diferenciálních rovnic nebeské mechaniky ke kořenům polynomu je známa z cca 1780. Vyjádření pomocí determinantů je z cca 1830, souvislost s vlastnostmi matic je z cca 1880. Moderní pojetí témat vycházející z rovnice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ se ustálilo až cca 1940.

Konstrukce matice podle předepsaného charakteristického polynomu se nazývá angl. „*Companion matrix*“, něm. „*Begleitmatrix*“, česky doprovodná matice apod.