# Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice: Pro vektorový prostor $V$ nad tělesem $T$ a lineární zobrazení $f : V \to V$, *vlastní číslo* zobrazení $f$ je jakékoliv $\lambda \in T$, pro které existuje vektor $\boldsymbol{v} \in V \setminus \mathbf{0}$ takový, že $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.

*Vlastní vektor* odpovídající vlastnímu číslu $\lambda$ je libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in V$ takový, že $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.

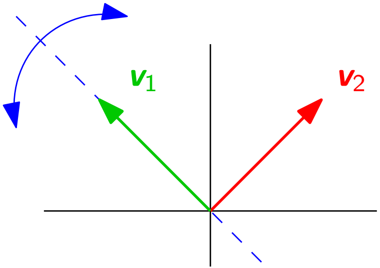
Má-li $V$ konečnou dimenzi $n$, pak $f$ může být reprezentováno maticí $\boldsymbol{A} = [f]_{B,B} \in T^{n \times n}$ vzhledem k nějaké bázi $B$ prostoru $V$.

Obdobně tak můžeme nadefinovat *vlastní čísla* $\lambda \in T$ a *vlastní vektory* $\boldsymbol{v} \in T^n$ *matic* — ty musejí splňovat $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.

Množina všech vlastních čísel matice je jejím *spektrem*.

# Ukázky — lineární zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$

Osová symetrie podle osy 2. a 4. kvadrantu

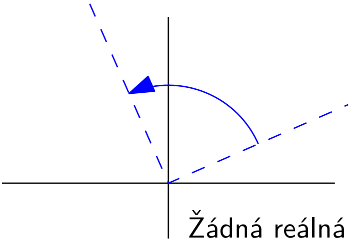



$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \boldsymbol{v}_1 = c \cdot (-1, 1)^\mathsf{T}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \boldsymbol{v}_2 = c \cdot (1, 1)^\mathsf{T}$$

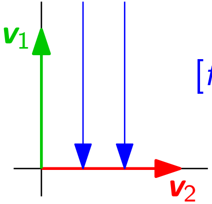
Otočení o pravý úhel



$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Žádná reálná vlastní čísla ani vlastní vektory neexistují.

Projekce na první souřadnici

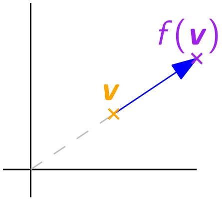



$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{v}_1 = c \cdot (0, 1)^{\mathsf{T}}$

$\lambda_2 = 1$ $\qquad$ $\boldsymbol{v}_2 = c \cdot (1, 0)^{\mathsf{T}}$

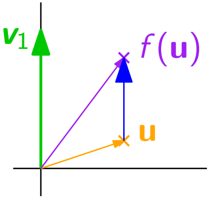
Zvětšení s faktorem 2




$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$ *Každý vektor* je vlastní vektor.

Lineární zobrazení dané maticí




$$[f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ $\boldsymbol{v}_1 = c \cdot (0,1)^T$

# Vlastní vektory a vlastní čísla diagonální matice $\boldsymbol{D}$

Soustavu lineárních rovnic

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} v_1 \\ d_{22} v_2 \\ \vdots \\ d_{nn} v_n \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{v}$$

splňují následující vlastní čísla a vlastní vektory:

$$\begin{gathered} \lambda = d_{11} \text{ a } \boldsymbol{v} = \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^{\mathsf{T}}, \\ \lambda = d_{22} \text{ a } \boldsymbol{v} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^{\mathsf{T}}, \\ \vdots \\ \lambda = d_{nn} \text{ a } \boldsymbol{v} = \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)^{\mathsf{T}}. \end{gathered}$$

Vlastní čísla $\boldsymbol{D}$ jsou prvky na diagonále,
a vlastní vektory tvoří standardní bázi prostoru $T^n$.

# Vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů

Pozorování: Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu číslu tvoří podprostor.

Důkaz: Uvažme vlastní číslo $\lambda$ lineárního zobrazení $f : V \to V$ a množinu $U = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$

Pro jakékoli $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ a $t \in T$ dostaneme:

- $f(t\boldsymbol{u}) = tf(\boldsymbol{u}) = t\lambda\boldsymbol{u} = \lambda(t\boldsymbol{u})$,
- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$.

Proto je $U$ uzavřen na sčítání a skalární násobky, t.j. $U$ je podprostor prostoru $V$.

Definice: *Geometrická násobnost* vlastního čísla je dimenze podprostoru jeho vlastních vektorů.

# Vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů

Věta: Nechť $f : V \to V$ je lineární zobrazení, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla $f$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že $k$ je nejmenší číslo, pro které existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ odporující větě, t.j. existují koeficienty $a_1, \dots, a_k \in T \setminus 0$ takové, že $\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$.

Vektor $\mathbf{0}$ vyjádříme poprvé: $\mathbf{0} = \lambda_k \mathbf{0} = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i \boldsymbol{v}_i$,

a podruhé: $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \boldsymbol{v}_i$,

odtud: $\mathbf{0} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) a_i \boldsymbol{v}_i$.

Protože $\lambda_i \neq \lambda_k$ dostaneme $(\lambda_i - \lambda_k) a_i \neq 0$.
Již $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ jsou lineárně závislé, což je spor s minimalitou $k$.

# Vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů

Věta: Nechť $f : V \to V$ je lineární zobrazení a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla $f$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory. Potom $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důsledek: Matice řádu $n$ mají nejvýše $n$ různých vlastních čísel.

... v $T^n$ lze nalézt jen $n$ lineárně nezávislých vektorů, ale ne více.

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež?
   Má-li prostor $V$ bázi složenou z vlastních vektorů zobrazení $f : V \to V$, potom jsou všechna jeho vlastní čísla různá.
2. Je-li $(1, 1, \ldots, 1)^T$ vlastním vektorem $\boldsymbol{A}$, pak $\boldsymbol{A}$ má stejné:
   a) sloupce, b) sloupcové součty, c) sloupcové součiny,
   d) řádky, e) řádkové součty, f) řádkové součiny.
3. Množina vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ obsahuje všechny vektory standardní báze prostoru $T^n$, právě když matice $\boldsymbol{A}$ je
   a) jednotková, b) diagonální, c) symetrická, d) regulární.
4. Kolik je lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ s vlastním číslem $3$ geometrické násobnosti $2$? a) žádné, b) $1$, c) 2, d) 5, e) 25.

# Komentář k řešení kvízu

1. Např. standardní báze pro identitu má jen $\lambda = 1$.
2. V $i$-tém řádku součinu $\boldsymbol{A}(1, \dots, 1)^{\mathsf{T}}$ je řádkový součet $a_{i1} + \cdots + a_{in}$ a ten je roven $\lambda \cdot 1$.
3. Rovnosti $\boldsymbol{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ udává, že $i$-tý sloupec matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje $\lambda_i$ na diagonále a jinak nuly. První a poslední možnost neplatí, protože vlastní číslo $\lambda_i$ nemusí být $1$ a může být $0$.
4. Z geometrické násobnosti $2$ vyplývá, že každý vektor ze $\mathbb{Z}_5^2$ je vlastní vektor zobrazení $f$. To je pak jediné: $f(\boldsymbol{u}) = 3\boldsymbol{u}$.

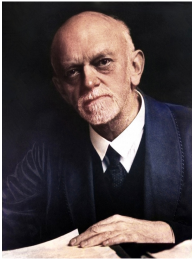
## Otázky k porozumění tématu přednášky

- Proč v definici vlastního čísla požadujeme nenulovost vektoru $\boldsymbol{u}$, zatímco u vlastních vektorů ji připouštíme?
- Mohou být i jiné vektory než vektory standardní báze vlastními vektory diagonální matice?
- Proč se podprostory odpovídající různým vlastním vektorům protínají pouze v počátku?

# Poznámky k pojmosloví a značení

Vlastní číslo a vlastní vektor se v angličtině obvykle nazývají *eigenvalue* a *eigenvector*.

Termín zavedl D. Hilbert v roce 1904, patrně v návaznosti na označení „*Eigentöne*“ od H. von Helmholtze z roku 1862 pro základní tón řady alikvótních tónů.



David Hilbert
1862 – 1948

„*Eigen*“ znamená „*vlastní*“ v němčině a holandštině.