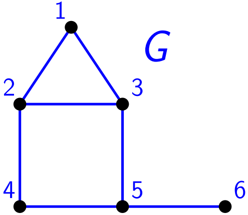
Počet koster grafu

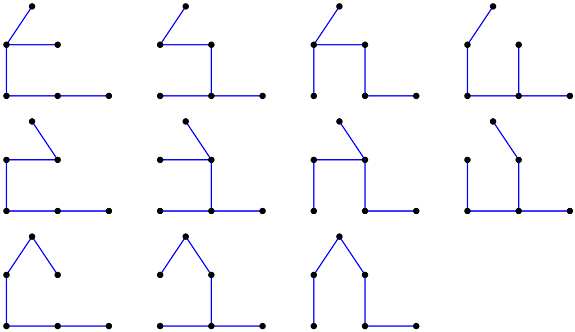
Definice: *Kostra* souvislého grafu G je jeho podgraf, který je stromem (souvislý, bez cyklů) a obsahuje všechny vrcholy G.

Počet koster grafu G se značí $\kappa(G)$.

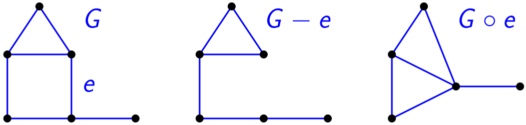
Ukázka:



$\kappa(G) = 11$



Grafové operace



Značení: Odebráním hrany e z grafu G vznikne graf $G - e$.

Pozorování: Odebráním hrany se graf může stát nesouvislý (odebráním tzv. *mostu*). Nesouvislé grafy nemají žádnou kostru.

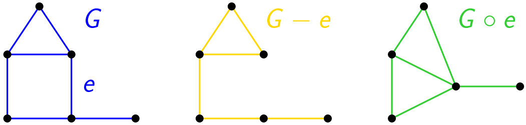
Definice: *Kontrakce* hrany $e = (u, v)$ spočívá v odebrání e a sloučení u a v do jednoho vrcholu. Ostatní hrany zůstávají.

Pozorování: Kontrakcí mohou vzniknout násobné hrany a smyčky.

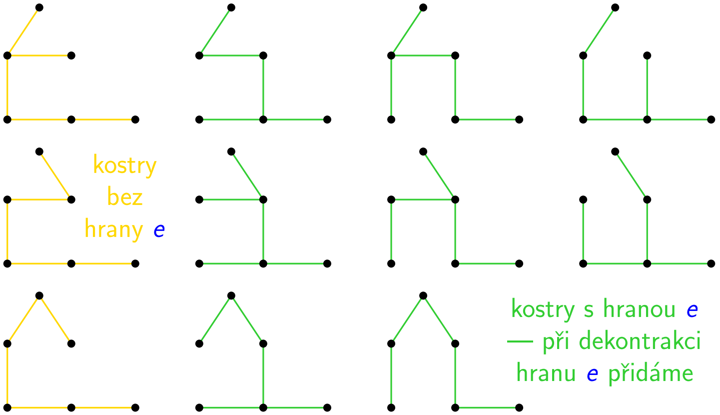
Definice: Zobecnění grafu na strukturu s násobnými hranami a smyčkami se nazývá *multigraf*. Kostry multigrafů splňují:

- Žádná kostra neobsahuje smyčku (jde o cyklus délky 1).
- Různá vlákna násobné hrany odpovídají různým kostrám.

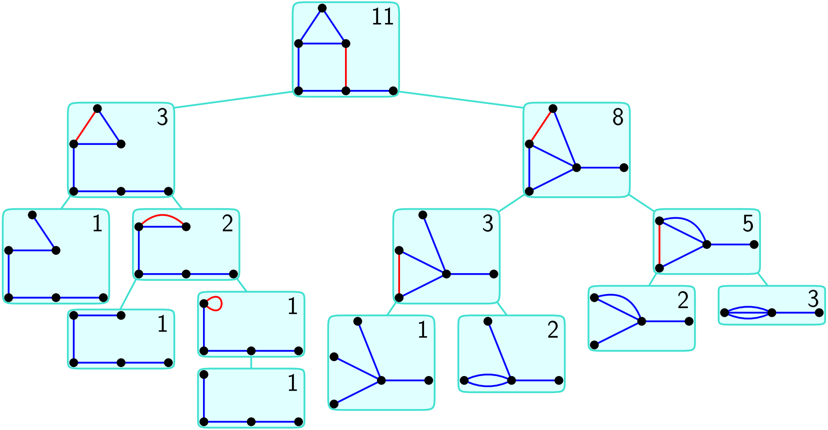
Rekurence pro hranu (nikoli smyčku)



$$\kappa(G) = \kappa(G - e) + \kappa(G \circ e)$$



Část stromu stromu rekurence



$\uparrow$ pro smyčku e platí: $\kappa(G) = \kappa(G - e)$

Strom rekurence může být exponenciálně velký vzhledem k velikosti původního grafu.

Determinanty — počet koster grafu

Definice: *Laplaceova matice* grafu G na $V_G = \{v_1, \dots, v_n\}$ je $\boldsymbol{L}_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že:

$$(\boldsymbol{L}_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{jestliže } i \neq j \text{ a } (v_i, v_j) \in E_G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pozorování: Laplaceova matice $\boldsymbol{L}_G$ je singulární.

Pozorování: Pokud G není souvislý, pak $\boldsymbol{L}_G^{11}$ je singulární.

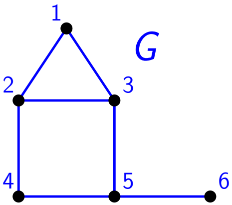
... součet řádků odpovídajících vrcholům komponenty je nulový.

Věta: Každý G na alespoň dvou vrcholech má $\det \boldsymbol{L}_G^{11}$ koster.

Pozorování i věta platí také pro multigrafy, pokud:

- $-(\boldsymbol{L}_G)_{ij}$ pro $i \neq j$ je *násobnost* hrany (v_i, v_j).
- $\deg(v_i)$ zahrnuje hrany s násobnostmi, ale ne smyčky, čili pro smyčku e platí: $\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{L}_{G-e}$

Determinanty — počet koster grafu



Laplaceova matice

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{L}_G^{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

Vlastnosti det $\boldsymbol{L}^{ij}$

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{L}_G^{11} = \left|\begin{matrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array}$$

$$= \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{array}{c} \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array}$$

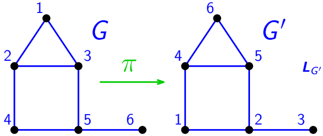
$$= (-1) \cdot \left|\begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{VI} \end{array} = -\det \boldsymbol{L}_G^{21}$$

Analogicky pro sloupcové operace dostáváme: $\det \boldsymbol{L}_G^{21} = -\det \boldsymbol{L}_G^{22}$.

Důsledek: Pro libovolné $i, j \in \{1, \ldots, n\}$: $\det \boldsymbol{L}_G^{ij} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{L}_G^{11}$.

Laplaceovy matice izomorfních grafů

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{L}_{G'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{L}_G^{11} = \det \boldsymbol{L}_{G'}^{66} = \det \boldsymbol{L}_{G'}^{11}$$

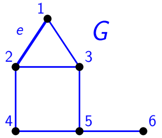
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Matice $\boldsymbol{L}_G^{11}$, $\boldsymbol{L}_{G'}^{66}$ se liší pouze permutací *řádků a sloupců* podle π.
Toto π se aplikuje dvakrát: na řádky a na sloupce.
I když $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$, celkové znaménko determinantu se nezmění.

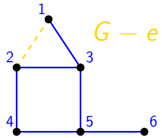
Souvislost mezi rekurencí a linearitou determinantu

$$\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa(G \circ e) = \det \boldsymbol{L}_{G-e}^{11} + \det \boldsymbol{L}_{G\circ e}^{11} \stackrel{??}{=} \det \boldsymbol{L}_{G}^{11}$$

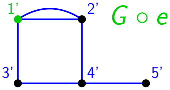
$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{L}_{G-e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{L}_{G\circ e} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Souvislost mezi rekurencí a linearitou determinantu

$$\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa(G \circ e) = \det \boldsymbol{L}_{G-e}^{11} + \det \boldsymbol{L}_{G\circ e}^{11} \stackrel{??}{=} \det \boldsymbol{L}_{G}^{11}$$

$$\boldsymbol{L}_G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_G^{11} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{L}_{G-e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_{G-e}^{11} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{L}_{G\circ e} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L}_{G\circ e}^{11} = \boldsymbol{C}$$

Souvislost mezi rekurencí a linearitou determinantu

$$\kappa(G) = \kappa(G - e) + \kappa(G \circ e) = \det \boldsymbol{L}^{11}_{G-e} + \det \boldsymbol{L}^{11}_{G\circ e} = \det \boldsymbol{L}^{11}_{G}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1+0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1+0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0+0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0+0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{C}$$

Důkaz věty

Věta: Každý multigraf G s $|V_G| \geq 2$ splňuje $\kappa(G) = \det \boldsymbol{L}_G^{11}$.

Důkaz: Pro nesouvislé platí: $0 = 0$. Jinak indukcí podle $m = |E_G|$.
Má-li G smyčku e, pak $\kappa(G) = \kappa(G - e) = \boldsymbol{L}_{G-e}^{11} = \boldsymbol{L}_G^{11}$.

Základ indukce: souvislý dvouvrcholový G bez smyček splňuje:
$\kappa(G) = |E_G| = \deg(v_2) = (\boldsymbol{L}_G)_{22} = \det \boldsymbol{L}_G^{11}$.

Indukční krok: Zvolme libovolnou $e \in E_G$, b.ú.n.o. $e = (v_1, v_2)$.

Označme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_G^{11}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}_{G-e}^{11}$ a $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L}_{G \circ e}^{11}$.

$\boldsymbol{C}$ je podmatice $\boldsymbol{L}_G$ odpovídající $v_3, \ldots, v_n$, tedy $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{11} = \boldsymbol{B}^{11}$.

Z indukčního předpokladu $\kappa(G - e) = \det \boldsymbol{B}$, $\kappa(G \circ e) = \det \boldsymbol{C}$.

Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou shodné kromě $b_{11} = a_{11} - 1$, protože vypuštěním e klesne stupeň v_2 o jedna. První sloupec $\boldsymbol{A}$ vyjádříme jako součet prvního sloupce $\boldsymbol{B}$ a vektoru $\mathbf{e}_1$ ze standardní báze.

Linearitou $\det \boldsymbol{A}$ podél tohoto rozkladu prvního sloupce získáme $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{C}$. Nyní dokončíme:

$\kappa(G) = \kappa(G - e) + \kappa(G \circ e) = \det \boldsymbol{L}_{G-e}^{11} + \det \boldsymbol{L}_{G \circ e}^{11} = \det \boldsymbol{L}_G^{11}$

Kostry úplných grafů — Cayleyho vzorec

Věta: Úplný graf K_n má n^{n-2} koster.

Důkaz:

$$\kappa(K_n) = \det \boldsymbol{L}^{11}_{K_n} = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -n & n & 0 & \dots & 0 \\ -n & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -n & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} n^{n-2}$$

(1) odečtením prvního řádku od ostatních

(2) přičtením ostatních sloupců k prvnímu

(3) protože $\boldsymbol{L}^{11}_{K_n}$ i ostatní matice jsou řádu $n-1$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik -1 obsahuje Laplaceova matice úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$? a) $m+n$, b) mn, c) $2mn$, d) $2mn-m-n$.
2. Rekurenci pro počet koster cyklu C_n lze interpretovat tak, že
   a) cyklus C_n má o jednu kostru víc než C_{n-1},
   b) cyklus C_n má o jednu kostru víc než P_{n-1},
   c) cyklus C_n má tolik koster, co C_{n-1} a P_{n-1} dohromady.
3. Strom T má jednu kostru, protože vrcholy stromu lze uspořádat tak, že matice $\boldsymbol{L}_T^{1,n}$ je
   a) jednotková $\mathbf{I}$, b) opak jednotkové $-\mathbf{I}$, c) symetrická,
   d) horní trojúhelníková s 1 na diagonále, e) permutační,
   f) horní trojúhelníková s -1 na diagonále, g) nezáporná,
   h) záporná, i) matice s determinantem $(-1)^{n+1}$.
4. Pravda nebo lež? Pokud zdvojíme hrany incidentní s nějakým vrcholem v_i, vzroste počet koster na dvojnásobek, protože zdvojnásobíme i-tý řádek Laplaceovy matice.

Komentář k řešení kvízu

1. Každá z mn hran (v_i, v_j) odpovídá dvěma $-1 = l_{ij} = l_{ji}$.
2. Vztah je: $\kappa(C_n) = \kappa(C_n - e) + \kappa(C_n \circ e) = \kappa(P_n) + \kappa(C_{n-1})$, přičemž $\kappa(P_n) = 1$ a $\kappa(C_{n-1}) = n - 1$.
3. Pro hvězdu $K_{1,3}$ platí, že $\boldsymbol{L}_{K_{1,3}}^{1,n}$ je jedna z matic:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
což vylučuje případy a–h). Případ i) plyne z pravidla o $\det \boldsymbol{L}^{i,j}$.
4. Např. zdvojením hran u prostředního vrcholu cesty P_3 dostaneme 4 kostry a ne jen 2.
Ve skutečnosti v L_G zdvojnásobíme i ostatní prvky v i-tém sloupci a zvýšíme některé prvky na diagonále.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jakým způsobem by bylo potřeba upravit výpočet a důkaz pro určení počtu koster nesouvislého grafu?
  (Kostrou zde rozumíme maximální podgraf na všech vrcholech grafu, takový, že nemá žádné cykly.)
- Jak se změní rekurence, matice a důkaz v případě, kdy je za hranu e vybrána smyčka?
- Jak vypadají Laplaceovy matice grafů s mosty a artikulacemi?
- Proč je v důkazu využita indukce podle počtu hran a ne podle počtu vrcholů?

Poznámky k pojmosloví a značení

Laplaceova matice bývá také někdy nazývána Kirchhoffova matice. Je diskrétní verzí tzv. *Laplaceova operátoru* nazvaného po francouzském matematiku P.-S. de Laplaceovi, který jej použil při studiu nebeské mechaniky.

Laplaceovy matice souvisejí s *algebraickou souvislostí grafu*, objevenou v roce 1973 českým matematikem Miroslavem Fiedlerem (1926 – 2015).

Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827)

Cayleyho vzorec byl objeven Carlem Wilhelmem Borchardtem (1817 – 1880) v roce 1860 a byl dokázán pomocí determinantu.

V krátké poznámce z roku 1889 Arthur Cayley (1821 – 1895) vzorec rozšířil v několika směrech. I když se Cayley odvolával na Borchardtův článek, vzorec už zůstal pojmenován po něm.