Adjungovaná matice

Laplaceův rozvoj: Pro $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}^{ij},$$ kde $\boldsymbol{A}^{ij}$ je podmatice

získaná z $\boldsymbol{A}$ odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Ukázka: Rozvoj determinantu podle druhého řádku

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Definice: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je *adjungovaná matice* $\operatorname{adj} \boldsymbol{A}$ definovaná $(\operatorname{adj} \boldsymbol{A})_{ji} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}^{ij}$.

…faktory Laplaceova rozvoje podél i-tého *řádku* $\boldsymbol{A}$
ukládáme do i-tého *sloupce* $\operatorname{adj} \boldsymbol{A}$.

Ukázka:

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -15 \\ -6 & -12 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{adj} \boldsymbol{A})_{12} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} \cdot & 2 & 5 \\ * & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 19 \end{aligned}$$

Adjungovaná matice a inverzní matice

Věta: Pro regulární matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$: $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \operatorname{adj} \boldsymbol{A}$.

Ukázka:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 50 + 0 - 45 - 0 - 12 = 2$$

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -15 \\ -6 & -12 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9/2 & 19/2 & -15/2 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9/2 & 19/2 & -15/2 \\ -3 & -6 & 5 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Adjungovaná matice a inverzní matice

Věta: Pro regulární matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$: $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \operatorname{adj} \boldsymbol{A}$.

Důkaz: Laplaceovým rozvojem $\det \boldsymbol{A}$:

$$(i\text{-tý řádek z } \boldsymbol{A}) \cdot (i\text{-tý sloupec z } \operatorname{adj} \boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$$

pro $j \neq i$: $(j\text{-tý řádek z } \boldsymbol{A}) \cdot (i\text{-tý sloupec z } \operatorname{adj} \boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}' = 0$,
kde $\boldsymbol{A}'$ se získá z $\boldsymbol{A}$ *nahrazením* i-tého řádku za j-tý.

Tedy: $\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \operatorname{adj} \boldsymbol{A}\right) = \mathbf{I}$

Ukázka: Prvek součinu na diagonále pro $i = 2$: $(\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A})_{22} =$

$$2\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|$$

Prvek součinu mimo diagonálu pro $i = 2$ a $j = 1$: $(\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A})_{21} =$

$$1\cdot(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Cramerovo pravidlo

Věta: Nechť $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je regulární matice. Pro jakékoli $\boldsymbol{b} \in T^n$ řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$,
kde $\boldsymbol{A}_{i\to\boldsymbol{b}}$ získáme z $\boldsymbol{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$.

Ukázka: Řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} = (7,4,9)^\mathsf{T}$ lze získat výpočtem:

$$\det \boldsymbol{A}_{1\to\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad \det \boldsymbol{A}_{2\to\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det \boldsymbol{A}_{3\to\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2$$

Proto $\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \det \boldsymbol{A}_{1\to\boldsymbol{b}} \\ \det \boldsymbol{A}_{2\to\boldsymbol{b}} \\ \det \boldsymbol{A}_{3\to\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zkouška:

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Cramerovo pravidlo

Věta: Nechť $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je regulární matice. Pro jakékoli $\boldsymbol{b} \in T^n$ řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$, kde $\boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$ získáme z $\boldsymbol{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$.

Důkaz: Označme $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ sloupce matice $\boldsymbol{A}$.

Soustavu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ lze přepsat po sloupcích na vztah $\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}$.

Z linearity determinantu podle i-tého sloupce dostáváme:

$$\det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}} = \det \boldsymbol{A}_{i\to \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i} \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{a}_j} = x_i \det \boldsymbol{A}$$

$(*)$ rozepsáno:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots \sum_{j=1}^{n} x_j a_{1j} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \dots \sum_{j=1}^{n} x_j a_{nj} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

- $\det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{a}_j} = 0$ pro $i \neq j$, neboť i-tý sloupec je shodný s j-tým.
- V jediném členu $\boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{a}_i} = \boldsymbol{A}$ k žádnému nahrazení nedošlo.

Cramerovo pravidlo

Věta: Nechť $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ je regulární matice. Pro jakékoli $\boldsymbol{b} \in T^n$ řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ splňuje $x_i = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$, kde $\boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$ získáme z $\boldsymbol{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$.

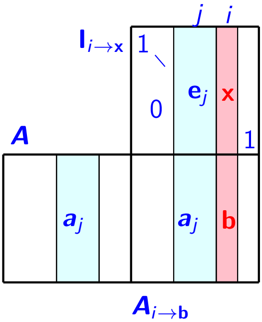
Krátký důkaz: Využijeme pravidlo pro determinant součinu.

Uvažme matici $\mathbf{I}_{i\to \boldsymbol{x}}$ získanou z $\mathbf{I}_n$ nahrazením i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{x}$.

Potom $\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{I}_{i\to \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$,

tedy $\det \boldsymbol{A} \cdot \det \mathbf{I}_{i\to \boldsymbol{x}} = \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$,

proto $x_i = \det \mathbf{I}_{i\to \boldsymbol{x}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \det \boldsymbol{A}_{i\to \boldsymbol{b}}$.

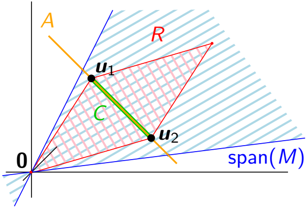


Různé druhy obalu množiny v euklidovském prostoru

Pro množinu $M = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$

Podprostor generovaný M
neboli lineární obal je:

$$\mathrm{span}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$



Afinní obal: $A = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i, a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \right\}$

…nejmenší posun podprostoru obsahující M.

Konvexní obal: $C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i, a_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{k} a_i = 1 \right\}$

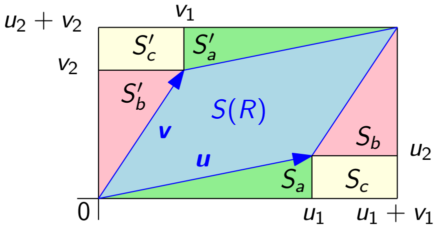
…nejmenší konvexní množina obsahující M.

Rovnoběžnostěn určený M: $R = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{u}_i, a_i \in [0,1] \right\}$

Geometrický význam determinantu

Věta: Pro $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{R}^n$ je objem rovnoběžnostěnu R daného $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ roven $|\det \boldsymbol{A}|$, kde $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ jsou sloupce (řádky) $\boldsymbol{A}$.

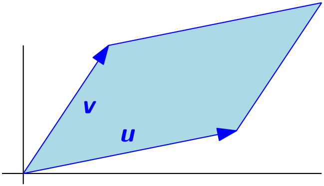
Ukázka: Plocha $S(R)$ rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ z $\mathbb{R}^2$:



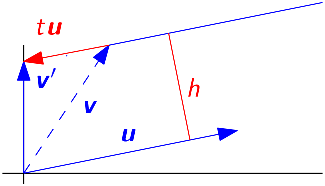
$$
\begin{aligned}
S(R) &= (u_1 + v_1)(u_2 + v_2) - 2(S_a + S_b + S_c) \\
&= u_1 u_2 + u_1 v_2 + v_1 u_2 + v_1 v_2 - u_1 u_2 - v_1 v_2 - 2 v_1 u_2 \\
&= u_1 v_2 - v_1 u_2 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Idea důkazu — elementární úpravy zachovávají objem

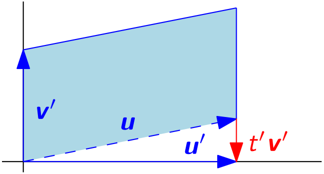
Aplikováno na transpozici $\det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \det \boldsymbol{A}$; vektory jsou *řádky*.



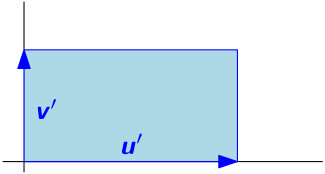
$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 + tu_1 & v_2 + tu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & v_2' \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} u_1 + t'0 & u_2 + t'v_2' \\ 0 & v_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1' & 0 \\ 0 & v_2' \end{vmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} u_1' & 0 \\ 0 & v_2' \end{vmatrix}$$

Geometrický význam determinantu

Věta: Pro $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathbb{R}^n$ je objem rovnoběžnostěnu R daného $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ roven $|\det \boldsymbol{A}|$, kde vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ tvoří sloupce $\boldsymbol{A}$.

Značení: Objem tělesa $V \subseteq \mathbb{R}^n$ značíme $\mathrm{vol}(V)$.

Důsledek: Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a matici tohoto lineárního zobrazení $[f]_{B,B}$ vzhledem k nějaké bázi B platí, že při provedení zobrazení f se objemy těles mění následovně:

$$\mathrm{vol}(f(V)) = \left|\det([f]_{B,B})\right| \cdot \mathrm{vol}(V)$$

Idea: Objem se definuje přes dělení V na hyperkrychle, jejichž velikost se blíží k 0. Hyperkrychle se zobrazí na rovnoběžnostěny s objemy změněnými faktorem $\left|\det([f]_{E,E})\right|$, protože matice $[f]_{E,E}$ obsahuje jako své sloupce obrazy vektorů přirozené báze.

Pro jiné báze: $\det([f]_{B,B}) = \det([\mathrm{id}]_{E,B}[f]_{E,E}[\mathrm{id}]_{B,E}) =$ $\det([\mathrm{id}]_{B,E})^{-1} \det([f]_{E,E}) \det([\mathrm{id}]_{B,E}) = \det([f]_{E,E})$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik aritmetických operací je třeba na výpočet inverzní matice řádu n pomocí adjungované matice, když každý z determinantů počítáme Gaussovou eliminací?
   a) $\approx n^2$, b) $\approx n^3$, c) $\approx n^4$, d) $\approx n^5$, e) $\approx n!$.
2. Pravda nebo lež? Pokud je třeba jen jediná z matic $A_{i \to \boldsymbol{b}}$ singulární, pak příslušná soustava nemá řešení.
3. Pravda nebo lež? Celočíselná reálná matice $\boldsymbol{A}$ má celočíselnou inverzní matici, právě když $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$.
4. Adjungovaná matice k singulární čtvercové matici
   a) neexistuje, b) je nulová, c) je singulární,
   d) může být singulární i regulární, e) je regulární.

Komentář k řešení kvízu

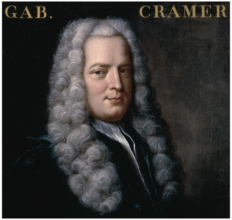
1. Výpočet n^2 prvků, Gaussova eliminace pokaždé $\approx n^3$ operací.
2. V důsledku je jen i-tá složka nulová: $x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_{i \to \boldsymbol{b}}}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{0}{\det \boldsymbol{A}} = 0$.
3. Dopředná implikace plyne z celočíselnosti adjungované matice. Zpětná implikace: Je-li $\det \boldsymbol{A} = q \in \mathbb{Z}$, pak $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{q}$. Pro $|q| \geq 2$ je $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$, a proto $\boldsymbol{A}^{-1}$ nemůže být celočíselná.
4. Existence plyne z definice, nenulovost např. z jedničkové matice řádu 2. Kdyby $\operatorname{adj} \boldsymbol{A}$ byla regulární, pak ze vztahu $\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I}$ vynásobením regulární inverzí dostaneme $\boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A} \cdot (\operatorname{adj} \boldsymbol{A})^{-1} = \mathbf{0}$ což je spor, protože existují i nenulové singulární matice $\boldsymbol{A}$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Kolik aritmetických operací je asymptoticky potřeba k výpočtu řešení soustavy Cramerovým pravidlem a kolik při použití Gaussovy eliminace? Podobně, jak vychází srovnání pro výpočet inverzní matice pomocí adjungované matice?
- Jaký je vztah mezi řádky či sloupci adjungované matice $\operatorname{adj} \boldsymbol{A}$ a vektory z jádra matice $\ker \boldsymbol{A}$?

Poznámky k pojmosloví a značení

G. Cramer publikoval své pravidlo bez důkazu v roce 1750, i když bylo známo o sto let dříve G. W. Leibnizovi.



Gabriel Cramer
1704 – 1752
[Obrázek: Wikipedie]

Termín „adjungovaná matice“ odpovídá angl. *adjugate matrix*, zatímco *adjoint matrix* znamená česky hermitovskou transpozici.