Linearita determinantu

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci, tj. vzhledem ke skalárnímu násobku řádku:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{i1} & t \cdot a_{i2} & \dots & t \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a vzhledem ke sčítání řádků:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Důkaz pro skalární násobek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t \cdot a_{i1} & t \cdot a_{i2} & \dots & t \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} \right) \cdot t \right) =$$

$$= t \cdot \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ukázka linearity vůči součtu

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (b_{11}+c_{11})a_{22}a_{33} + (b_{12}+c_{12})a_{23}a_{31} + (b_{13}+c_{13})a_{21}a_{32} \\
& -(b_{11}+c_{11})a_{23}a_{32} - (b_{12}+c_{12})a_{21}a_{33} - (b_{13}+c_{13})a_{22}a_{31} \\
\overset{(*)}{=} \quad & (b_{11}a_{22}a_{33} + b_{12}a_{23}a_{31} + b_{13}a_{21}a_{32} \\
& -b_{11}a_{23}a_{32} - b_{12}a_{21}a_{33} - b_{13}a_{22}a_{31}) + \\
& (c_{11}a_{22}a_{33} + c_{12}a_{23}a_{31} + c_{13}a_{21}a_{32} \\
& -c_{11}a_{23}a_{32} - c_{12}a_{21}a_{33} - c_{13}a_{22}a_{31}) \\
= \quad & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$(*)$ . . . byly použity distributivní, asociativní a komutativní axiomy pro algebraickou manipulaci s těmito členy.

Důkaz pro součet

Pokud matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ splňují $a_{kj} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij} & \text{když } k = i \text{ a} \\ b_{kj} = c_{kj} & \text{když } k \neq i, \text{ pak} \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} a_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \left(b_{i,p(i)} + c_{i,p(i)} \right) \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} a_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} b_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} b_{k,p(k)} \\
&+ \sum_{p \in S_n} c_{i,p(i)} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus i} c_{k,p(k)} \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} b_{k,p(k)} + \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod_{k=1}^{n} c_{k,p(k)} \\
&= \det \boldsymbol{B} + \det \boldsymbol{C}
\end{aligned}
$$

Linearita determinantu

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

Důsledek: Přičtením skalárního násobku řádku k jinému se determinant nezmění; analogicky pro sloupce.

Neformální důkaz:

$$\begin{vmatrix} - & a_{i\bullet} + t \cdot a_{j\bullet} & - \\ - & a_{j\bullet} & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & a_{i\bullet} & - \\ - & a_{j\bullet} & - \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} - & a_{j\bullet} & - \\ - & a_{j\bullet} & - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & a_{i\bullet} & - \\ - & a_{j\bullet} & - \end{vmatrix}$$

Důsledek: Je-li $\boldsymbol{A}$ singulární, pak $\det \boldsymbol{A} = 0$.

Důkaz: Závislý řádek lze eliminovat na nulový řádek.

Výpočet determinantu

Úpravami na odstupňovaný tvar nad $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Použité úpravy:

1. přičtení 3-násobku prvního řádku k druhému a
   přičtení (1-násobku) prvního řádku ke třetímu
2. přerovnání řádků podle permutace s cykly $((1),(2,3,4))$
   $\mathrm{sgn} = 1$, proto tato operace nezmění znaménko
3. přičtení třetího *sloupce* k druhému

Determinant součinu

Věta: Pro libovolné $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in T^{n\times n}$: $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$.

Důkaz: B.ú.n.o. $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ jsou regulární, jinak dostaneme $0 = 0$.

Součiny s elementárními maticemi zachovávají determinant $\det(\boldsymbol{EB}) = \det \boldsymbol{E} \det \boldsymbol{B}$, protože:

- pro přičtení i-tého řádku k j-tému: $\det \boldsymbol{E} = 1$,
- pro vynásobení i-tého řádku t: $\det \boldsymbol{E} = t$.

(Z těchto dvou lze odvodit ostatní operace.)

Rozložíme regulární $\boldsymbol{A}$ na elementární matice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k$.
$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{E}_1 \det(\boldsymbol{E}_2 \cdots \boldsymbol{E}_k \boldsymbol{B}) =$
$\det \boldsymbol{E}_1 \cdots \det \boldsymbol{E}_k \det \boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{E}_1 \cdots \boldsymbol{E}_k) \det \boldsymbol{B} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$

Důsledek: $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Důkaz: $\det \boldsymbol{A} \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{AA}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$

Důsledek: $\boldsymbol{A}$ je regulární *právě když* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Laplaceův rozvoj

Notace: $\boldsymbol{A}^{ij}$ je podmatice získaná z $\boldsymbol{A}$ odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta: Pro libovolné $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a jakékoli $i \in \{1,\dots,n\}$ platí, že:

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A}^{ij}$$

Důkaz: Vyjádříme i-tý řádek jako lineární kombinaci vektorů kanonické báze (transponované do řádků) a použijeme linearitu:

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = a_{i1}\mathbf{e}_1^T + a_{i2}\mathbf{e}_2^T + \cdots + a_{in}\mathbf{e}_n^T$

$$\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \dots \;\; a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = a_{i1}\begin{vmatrix} \dots\dots \\ 1\ 0 \dots 0 \\ \dots\dots \end{vmatrix} + a_{i2}\begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ 0\ 1\ 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} + \cdots + a_{in}\begin{vmatrix} \dots\dots \\ 0 \dots 0\ 1 \\ \dots\dots \end{vmatrix}$$

j-tý člen: $\begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots\dots \\ -\ \mathbf{e}_j^T - \\ \dots\dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}\begin{vmatrix} -\ \mathbf{e}_j^T - \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix} =$

$= (-1)^{i+1+j+1}\begin{vmatrix} -\ \mathbf{e}_1^T - \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\left|\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{1} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{A}^{ij} \\ \hline \end{array}\right| = (-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}^{ij})$

Ukázka Laplaceova rozvoje

Rozvoj podél prvního řádku:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \ = \ 0
\end{aligned}$$

Pro určení znaménka druhého determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ . & 4 & 6 \\ . & 7 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

1. záměna sloupců transpozicí $(1, 2)$ změní znaménko
2. zbytek prvního řádku neovlivňuje determinant
3. pevný bod (1) je vyloučen ze všech permutací a řád matice se sníží o jedna

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Má-li reálná matice řádu tři determinant 4, pak determinant její druhé mocniny je: a) 0, b) 1, c) 2, d) 4, e) 8, f) 16, g) 32, h) 64, i) jiné číslo než mocnina 2, např. 9.
2. Determinant matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, kde $a_{ij} = i + j$ je
   a) vždy roven nule, b) vždy nenulový,
   c) roven nule pro nekonečně mnoho hodnot n,
   d) nenulový pro nekonečně mnoho hodnot n.
3. Vztah $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$ pro matice stejného řádu:
   a) neplatí pro žádnou dvojici matic,
   b) platí, pokud má $\boldsymbol{A}$ alespoň jeden sloupec nulový
   c) platí, pokud má $\boldsymbol{A}$ nejvýše jeden sloupec nenulový
   d) platí, pokud má $\boldsymbol{A}$ všechny sloupce nulové.

Komentář k řešení kvízu

1. Z pravidla o determinantu součinu
   $\det(\boldsymbol{A}^2) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{A}) = 4^2 = 16$
2. Rozdíl dvou po sobě jdoucích řádků je řádek se samými jedničkami. Pro $n \geq 3$ je $\boldsymbol{A}$ singulární a platí $\det \boldsymbol{A} = 0$.
3. $\det(\mathbf{0} + \boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{B} = 0 + \det \boldsymbol{B} = \det \mathbf{0} + \det \boldsymbol{B}$.
   Zbylé dva případy neplatí, protipříkladem je např.:
   $$\begin{vmatrix} 1+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 + 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Platila by linearita determinantu, pokud bychom v definici opomněli znaménko?
- Jaká je složitost výpočtu při rekurentním použití Laplaceova rozvoje? Může být pro nějaké matice tento postup efektivní?
- Proč je možné při výpočtu determinantu libovolně střídat řádkové úpravy se sloupcovými?