Řešení soustav $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ s regulární $\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2
\end{aligned}
$$

Z druhé vyjádříme $x_1 = \frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}}$ a dosadíme do první:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\frac{b_2 - a_{22}x_2}{a_{21}} + a_{12}x_2 &= b_1 \qquad \Leftrightarrow \\
\frac{a_{11}b_2 - a_{11}a_{22}x_2 + a_{12}a_{21}x_2}{a_{21}} &= b_1 \qquad \Leftrightarrow \\
(-a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})x_2 &= a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \qquad \Leftrightarrow \\
x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}
\end{aligned}
$$

$$
x_1 = \frac{b_2 - a_{22}\frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}}{a_{21}} = \cdots = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}
$$

Pro tři rovnice

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Analogickým způsobem:

(vyjádříme neznámou z jedné rovnice a dosadíme ji do ostatních)

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - b_1 a_{23} a_{32} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{13} a_{22} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} + b_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} b_3 - a_{11} a_{23} b_3 - b_1 a_{21} a_{33} - a_{13} b_2 a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{12} b_2 a_{31} + b_1 a_{21} a_{32} - a_{11} b_2 a_{32} - a_{12} a_{21} b_3 - b_1 a_{22} a_{31}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}}$$

Determinanty

Opakování: S_n grupa permutací na množině $\{1, \ldots, n\}$.
Znaménko $p \in \mathrm{S}_n$ je $\operatorname{sgn} p = (-1)^{\#\text{ inverzí } p}$

Definice: *Determinant* matice $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ je dán výrazem

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{p \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}. \qquad \text{Značí se též } |\boldsymbol{A}|.$$

Ukázka: Pro $\boldsymbol{A} \in T^{2\times 2}$ máme $S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$.

pro $p = (1,2)$ máme $\operatorname{sgn} p = +1$ a $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = a_{11}a_{22}$

pro $p = (2,1)$ máme $\operatorname{sgn} p = -1$ a $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = a_{12}a_{21}$

Proto:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (+1)\cdot a_{11}a_{22} + (-1)\cdot a_{12}a_{21}$$

Intuitivně:

$$+\begin{pmatrix} a_{11} & \cdot \\ \cdot & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & a_{12} \\ a_{21} & \cdot \end{pmatrix}$$

Pro matice řádu tři máme šest možných permutací

$S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

permutace $p = (1,2,3),(2,3,1)$ a $(3,1,2)$ mají $\operatorname{sgn} p = +1$

permutace $p = (1,3,2),(2,1,3)$ a $(3,2,1)$ mají $\operatorname{sgn} p = -1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

$$+ \begin{pmatrix} a_{11} & . & . \\ . & a_{22} & . \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . & a_{12} & . \\ . & . & a_{23} \\ a_{31} & . & . \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} . & . & a_{13} \\ a_{21} & . & . \\ . & a_{32} & . \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} a_{11} & . & . \\ . & . & a_{23} \\ . & a_{32} & . \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} . & a_{12} & . \\ a_{21} & . & . \\ . & . & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} . & . & a_{13} \\ . & a_{22} & . \\ a_{31} & . & . \end{pmatrix}$$

Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{array}{c} + \\ \\ - \end{array} \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Jen pro matice 3×3 *!*

Pozorování: Má-li $\boldsymbol{A}$ nulový řádek, pak $\det \boldsymbol{A} = 0$.

Důkaz: Každý součin $\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$ obsahuje člen z nulového řádku.

Pozorování: Pro trojúhelníkové (i pro diagonální) matice platí:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Důkaz: Každá permutace p, pro kterou existuje index $i < p(i)$, musí mít index $j > p(j)$. V důsledku toho $a_{j,p(j)} = 0$.

Pokud by sporem $i \leq p(i)$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ a pro některé i_1 platilo, že $i_1 < p(i_1)$, pak zvažme posloupnost $i_1, i_2 = p(i_1), i_3 = p(i_2), \dots$ Protože p je prostá, tato posloupnost je rostoucí. Proto je neomezená, spor.

Pouze součin $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ odpovídající identické permutaci nemá pod úhlopříčkou žádný nulový člen.

Vlastnosti determinantu

Pozorování: $\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

Důkaz: Pro $p \in \mathsf{S}_n : p(i) = j \Leftrightarrow p^{-1}(j) = i$,

vztah $p \to q = p^{-1}$ je bijekce na S_n.

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}) = \sum_{p \in \mathsf{S}_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})_{i,p(i)} = \sum_{p \in \mathsf{S}_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{p(i),i} =$$

$$= \sum_{p^{-1} \in \mathsf{S}_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,p^{-1}(j)} = \sum_{q \in \mathsf{S}_n} \operatorname{sgn}(q) \prod_{j=1}^{n} a_{j,q(j)} = \det \boldsymbol{A}$$

Vlastnosti determinantu

Pozorování: $\det \boldsymbol{A} = \det\left(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\right)$

Pozorování: (Přerovnání sloupců podle permutace q)
Pro $q \in \mathrm{S}_n$ a $\boldsymbol{B} : b_{ij} = a_{i,q(j)}$ platí $\det \boldsymbol{B} = \operatorname{sgn} q \det \boldsymbol{A}$.

Důkaz:

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{B} &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} b_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(p(i))} = \\
&= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn} q \operatorname{sgn} q \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,(q \circ p)(i)} = \\
&= \operatorname{sgn} q \sum_{r \in S_n} \operatorname{sgn} r \prod_{i=1}^{n} a_{i,r(i)} = \operatorname{sgn} q \det \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

pro $r = q \circ p$; všimněte si, že $p \to r$ je bijekce na S_n

Vlastnosti determinantu

Pozorování: $\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

Pozorování: (Přerovnání sloupců podle permutace q)
Pro $q \in \mathrm{S}_n$ a $\boldsymbol{B} : b_{ij} = a_{i,q(j)}$ platí $\det \boldsymbol{B} = \operatorname{sgn} q \det \boldsymbol{A}$.

Důsledky:

- Totéž platí pro jakékoli přerovnání řádků.
- Výměna dvou řádků/sloupců změní znaménko determinantu.
- Pro matice nad tělesy $\operatorname{char} \neq 2$: Má-li $\boldsymbol{A}$ dva stejné řádky nebo sloupce, pak $\det \boldsymbol{A} = 0$. Důkaz: $d = -d \Rightarrow d = 0$.

Vlastnosti determinantu

Pozorování: $\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})$

Pozorování: (Přerovnání sloupců podle permutace q)
Pro $q \in \mathrm{S}_n$ a $\boldsymbol{B} : b_{ij} = a_{i,q(j)}$ platí $\det \boldsymbol{B} = \operatorname{sgn} q \det \boldsymbol{A}$.

Lemma: Má-li $\boldsymbol{A}$ dva stejné řádky nebo sloupce, pak $\det \boldsymbol{A} = 0$.

Důkaz: Nechť se k-tý řádek shoduje s l-tým.
Pro $p \in S_n$ a $q = p \circ (k, l)$ platí:
$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,q(i)}, \text{ ale } \operatorname{sgn}(p) = -\operatorname{sgn}(q).$$

$$\begin{array}{ccccc} & & p & q & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} . & \boxed{\boxed{a_{1,p(1)}}} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & \boxed{a_{k,p(k)}} & \boxed{a_{k,q(k)}} & . \\ . & . & \parallel & \parallel & . \\ . & . & \boxed{a_{l,q(l)}} & \boxed{a_{l,p(l)}} & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Protože $p \leftrightarrow q$ je bijekce mezi permutacemi s opačnými znaménky, lze sčítance v $\det \boldsymbol{A}$ spárovat tak, že se navzájem odečtou.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik sčítanců s kladným znaménkem je v determinantu matic řádu 6? a) 6, b) 12, c) 60, d) 120, e) 360, f) 720, g) 1 440.
2. Pravda nebo lež? Obsahuje-li matice jen nezáporná čísla, pak je její determinant také nezáporný.
3. Pravda nebo lež? Otočíme-li čtvercovou matici o 90° po směru hodinových ručiček, pak se její determinant nezmění.
4. Pro $\boldsymbol{A} \in T^{n \times n}$ a $t \in T$ je determinant matice $t\boldsymbol{A}$ roven:
   a) $t|\boldsymbol{A}|$, b) $t^2|\boldsymbol{A}|$, c) $nt|\boldsymbol{A}|$, d) $t^n|\boldsymbol{A}|$, e) $t^{2n}|\boldsymbol{A}|$,
   f) $t^{n^2}|\boldsymbol{A}|$, g) $(t|\boldsymbol{A}|)^2$, h) $(t|\boldsymbol{A}|)^n$, i) $(t|\boldsymbol{A}|)^{2n}$, j) $(t|\boldsymbol{A}|)^{n^2}$.

Komentář k řešení kvízu

1. Grupa S_6 obsahuje $6! = 720$ permutací, z nichž polovina má kladné znaménko.
2. Např. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.
3. Viz předchozí matice, přičemž $\det \mathbf{I}_2 = 1$.
4. Z definice: $\det(t\boldsymbol{A}) = \sum_{p \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} t a_{i,p(i)} =$

   $$\sum_{p \in \mathrm{S}_n} t^n \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t^n \sum_{p \in \mathrm{S}_n} \operatorname{sgn} p \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)} = t^n \det \boldsymbol{A}$$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Změní se hodnota nebo znaménko determinantu matice, pokud její řádky zapíšeme v opačném pořadí? (Tj. převrátíme-li ji zrcadlově podle vodorovné osy.)
- Z jaké vlastnosti grup vyplývá, že složení s pevnou permutací q je bijekce $p \to q \circ p$ na S_n?
- Mění se determinant matice vždy se změnou libovolného prvku, nebo lze nalézt takovou matici, že při změně vhodně zvoleného prvku této matice zůstane její determinant stejný? Bylo by možné sestavit matici, u níž lze změnit libovolný prvek a přitom determinant zůstane zachován?

Poznámky k pojmosloví a značení

Vzorce pro řešení malých soustav byly popsány v čínském rukopise *Matematika v devíti kapitolách* (10. – 2. st. p.n.l.) a až o tisíciletí předešly koncept matice.

Námi zavedená definice determinantu se nazývá *Leibnizova formule*.

Termín „determinant“ zavedl J. C. F. Gauss v roce 1801. Do té doby byl nazýván např. „resultant“.

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646 – 1716
[Obrázek: Wikipedie]