Úlohy k 13. cvičení

1. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Určete parametry $a, b \in T$ aby pro každou kvadratickou formu g na V nad T a libovolné tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ platilo:

   $$g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = ag(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + ag(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) + ag(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) + bg(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{v}) + bg(\boldsymbol{w})$$

3. Nechť vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje n pozorování, tedy tzv. výběr.

   Rozptyl výběru je definován jako $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$, kde $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ je výběrový průměr.

   Ukažte, že σ^2 je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a určete matici této formy.

4. Určete determinanty následujících matic:

   $$S_n = \begin{pmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + x & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n + x \end{pmatrix}, \qquad T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

5. Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:

   $$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Mějme matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, jejichž součin komutuje a přitom $\boldsymbol{A}$ je regulární.

   Rozhodněte, zdali také komutuje součin matic adj $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

7. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.

8. V závislosti na n rozhodněte, zdali je následující matice řádu n pozitivně definitní

   $$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$