

Úlohy k 12. cvičení

1. Určete signaturu reálné kvadratické formy dané maticí

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Určete signaturu reálné kvadratické formy

$$\text{a) } g((x, y, z)^T) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$$

$$\text{b) } g((x, y, z)^T) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$$

$$\text{c) } g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_4 - x_4^2$$

$$\text{d) } g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$\text{e) } g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

3. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Určete parametry $a, b \in T$ aby pro každou kvadratickou formu g na V nad T a libovolné tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platilo:

$$g(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = ag(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + ag(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + ag(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + bg(\mathbf{u}) + bg(\mathbf{v}) + bg(\mathbf{w})$$

5. Najděte polární bázi kvadratické formy na vektorovém prostoru \mathbb{Z}_5^3 , jejíž analytické vyjádření vůči standardní bázi je $g((x, y, z)^T) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$.

6. Nechť vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje n pozorování, tedy tzv. výběr.

Rozptyl výběru je definován jako $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ je výběrový průměr.

Ukažte, že σ^2 je kvadratická forma na \mathbb{R}^n a určete matici této formy.