

1. Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ je matice bilineární formy na prostoru T^3 . Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

a) řešte pro $T = \mathbb{R}$.

b) řešte pro $T = \mathbb{Z}_2$ (číslo 2 v \mathbb{Z}_2 odpovídá 0).

c) řešte pro $T = \mathbb{Z}_3$.

2. **(možné v sage)** Kvadratická forma g na vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 má vzhledem ke standardní bázi E analytické vyjádření $g(\mathbf{u}) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2yt + t^2$, kde $\mathbf{u} = (x, y, z, t)^T$. Najděte její analytické vyjádření $g(u)_B$ vzhledem k bázi: $B = \{(1, 1, 1, 1)^T, (0, 1, 1, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (0, 0, 0, 1)^T\}$.

Určete $g(\mathbf{u})$ pro vektor \mathbf{u} , který má vůči bázi B souřadnice $[\mathbf{u}]_B = (3, 1, 0, 0)^T$.

3. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 rozhodněte, zda existuje kvadratická forma g , pro kterou platí:

$$g((1, 0, 0)^T) = 1, \quad g((0, 1, 0)^T) = 2, \quad g((0, 0, 1)^T) = 3, \quad g((1, 0, 1)^T) = 4, \quad g((1, 1, 0)^T) = 5, \\ g((0, 1, 1)^T) = 6 \text{ a } g((1, 1, 1)^T) = 7.$$

Pokud ano, nalezněte matici symetrické bilineární formy, ze které je odvozena.

4. Určete signaturu reálné kvadratické formy dané maticí

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Určete signaturu reálné kvadratické formy

a) $g((x, y, z)^T) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$

b) $g((x, y, z)^T) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$

c) $g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_4 - x_4^2$

d) $g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

e) $g((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

6. Určete parametry $a, b \in T$ aby pro každou kvadratickou formu g na V nad T a libovolné tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ platilo:

$$g(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = ag(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + ag(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + ag(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + bg(\mathbf{u}) + bg(\mathbf{v}) + bg(\mathbf{w})$$