Úlohy k 10. cvičení

1. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.

2. **(možné v sage)** Rozhodněte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gaussovy eliminace a determinantů. Pokud ano, nalezněte její Choleského rozklad.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 15 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

3. Ukažte, že pro pozitivně definitní matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou matice $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}^{-1}$ pozitivně definitní (t.j. ukažte zároveň, že $\boldsymbol{A}$ je regulární).

4. **(možné v sage)**

   Dokažte nebo vyvraťte: Součin pozitivně definitních matic je pozitivně definitní.

5. Pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ pozitivně definitní?

6. **(možné v sage)** Spočtěte Choleského rozklad následující matice $\boldsymbol{A}$.

   Choleského rozklad použijte k řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (10, 21, -32, 26, 23)^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & -6 & 10 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & -5 & 15 & 11 \\ 1 & 2 & -3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

7. V závislosti na $n$ rozhodněte, zdali je následující matice řádu $n$ pozitivně definitní

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$