

Úlohy k 9. cvičení

1. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem \mathbb{C} .

Rozhodněte, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. (**možné v sage**) U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to 3, -4 a 5. Dopočítejte zbylé vlastní číslo.

Mezi možnými postupy hledejte ten nejjednodušší.

3. (**možné v sage**) Rozložte následující matici na součin \mathbf{RJR}^{-1} , kde matice \mathbf{R} je regulární a matice \mathbf{J} je v Jordanově normálním tvaru.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (**možné v sage**) S využitím Jordanova normálního tvaru spočítejte třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice

(Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

Správnost výpočtu ověřte zkouškou.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.