Úlohy k 8. cvičení, sage link `https://kam.mff.cuni.cz/~fiala/la2-2`

1. Pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, \ldots, a_5$ platí: $4a_1 + 3a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5 \leq 9\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_5^2}$

2. Mějme dva kolmé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Dále nechť $\|\boldsymbol{u}\| = 12, \|\boldsymbol{v}\| = 5$. Určete $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$.

3. **(možné v sage)** Rozhodněte, zdali následující matice jsou matice isometrií vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na prostoru $\mathbb{R}^d$ odpovídající dimenze d.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

4. Pro následující geometrická zobrazení v rovině určete jejich matice vzhledem ke kanonické bázi a rozhodněte, zda jde o izometrie:

   a) rotace v rovině kolem počátku o úhel α

   b) osová souměrnost podle osy procházející počátkem svírající s osou x úhel α.

   Všimněte si, že izometrie v euklidovských prostorech jde rozdělit na dvě skupiny. Zkuste je popsat jak geometricky, tak algebraicky.

5. Pro zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané maticí

   $$f_{[E,E]} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

   rozhodněte, zda jde o isometrii vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

   Dokážete zobrazení f popsat geometricky?

6. Zjistěte které analogie následujících vztahů pro množinový doplněk,

   (konkrétně pro množiny $A, B : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B,$)

   platí i pro ortogonální doplněk množinových operací na prostorech U a V, resp. množinách X a Y:

   a) $(U \cup V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$,

   b) $(X \cup Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$,

   c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp \cup V^\perp$,

   d) $(U \cap V)^\perp = \operatorname{span}(U^\perp \cup V^\perp)$,

   e) $(U \setminus V)^\perp = U^\perp \cup V$.

   f) $(U \setminus V)^\perp = \operatorname{span}(U^\perp \cup V)$.

7. Určete kosinus úhlu, který svírá tělsová úhlopříčka krychle s podstavou. Podobně spočítejte kosinus úhlu mezi podstavou čyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajícího vrcholu. Spočítejte také kosinus úhlu mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou.

   Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisejí?

   Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?