Úlohy k 7. cvičení, sage link `https://kam.mff.cuni.cz/~fiala/la2-2`

1. **(možné v sage)** Pro standardní skalární součin $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$:

   - skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - euklidovské normy vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - vzdálenost vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$
   - zdali jsou vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ navzájem kolmé.

   a) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (4, 2, 3)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (1, 5, -2)$.
   b) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (3, 1, -2)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (1, -3, 2)$.
   c) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (2, -1, 4)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (5, 2, -2)$.
   d) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (2, 1, 4, -1)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (4, -1, 0, 2)$.
   e) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (1 + i, 2 + i, -1)$.
   f) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (1, 2, 1, -2i)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (i, 2i, i - 1, 2)$.
   g) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (1, 1 + i)$, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)

2. **(možné v sage)** Vyřešte varianty a), b), c) a e) předchozí úlohy vzhledem ke skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^3$ danému předpisem: $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_2\overline{y_3}$.

3. Mějme dva kolmé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Dále nechť $\|\boldsymbol{u}\| = 12$, $\|\boldsymbol{v}\| = 5$. Určete $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$.

4. Pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, \dots, a_5$ platí: $4a_1 + 3a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5 \le 9\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_5^2}$

5. **(sage)** V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_r\}$ řádkového prostoru následujících matic.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. **(sage)** Rozšiřte ortonormální báze z předchozí úlohy na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

7. **(sage)** Pro matice z předchozí úlohy určete ortogonální projekci $\boldsymbol{p}$ vektoru $\boldsymbol{a} = (2, 2, 1, 5)^{\mathrm{T}}$ do řádkového prostoru příslušné matice a souřadnice této projekce $[\boldsymbol{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

8. **(možné v sage)** Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (10, 5, 13, 9)^{\mathrm{T}}$$

   Všimněte si, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou vzájemně kolmé.